Fregovo místo v dějinách logiky a západní filosofie

není náhoda, že moderní logika a analytická filosofie vznikly v díle jednoho člověka, obrat k jazyku

1879 *Begriffsschrift* (Pojmové písmo), úplně kalkulizovaná predikátová logika 1. řádu, fragment logiky řádů vyšších (další kvalitativní pokrok až Tarského syntakticko-sémantický vzestup, teorie modelů)
logicismus: odvození aritmetiky výhradně z logických principů
definice následníka v řadě

příklad: definice relace předka (P) z (genetického) rodiče (R)
pokus: aPb iff $\exists x_1, ...x_n\, aRx_1 \& \; x_1Rx_2......x_nRb$
definuje pouze prapra....(n-krát)rodiče

není definovatelné v logice 1. řádu
Frege, Dedekind využívají logiku řádu 2. (určující role při utváření moderní logiky, nikoli variace na známé téma ala vícehodnotové logiky)

aPb iff $\forall X(Xb\&\forall xy(Xy\&xRy\rightarrow Xx).\rightarrow Xa)$ (vlastní předek, tj. bPb)

Schröderova recenze: výtky dvojdimenzionálního symbolizmu, Fregova logika slabší než algebra logiky (ta ale ekvivalentní pouhé monadické predikátové logice 1. řádu, v níž je řetězení kvantifikátoru, nejvýznamnějšího přínos *Begriffsschrift*, zbytné)

1884 *Grundlagen der Arithmetik* (Základy aritmetiky), propedeutický spis v próze (prostý symbolů), otázka: co je číslo

obrat k jazyku — co je číslo = jak je nám dáno číslo

„*Jak je nám tedy dáno číslo, nemůžeme-li o něm mít žádnou představu ani názor?Slova něco znamenají pouze v kontextu věty. Jde tedy o to vysvětlit smysl věty, v níž se vyskytuje číslovka.*“

na nelingvistickou otázku lingvistická odpověď, číslo je význam výrazu jistého typu vyskytujícího se na jistých místech v jistých typech vět

místo v tradici západní filosofie: druhý koperníkovský obrat
analogie filosofie analytické s filosofií transcendentální

Kant — analýza formálněsémantických presupozic naší řeči o přírodě (fyziky)
Frege — ....matematických vět (udat principy konstituce abstraktních předmětů - čísel - a vykázat, že jsou logické povahy)

1891-92 články *O smyslu a významu*, *Funkce a pojem*, *Pojem a předmět*, cizelován pojmový aparát

1893 1. díl *Grundgesetze der Arithmetik* (Základní zákony aritmetiky), opus magnum logicismu
1903 2. díl, rok předtím Russell oznamuje objev paradoxu, množina všech množin, které si nenáleží

recepce
1891 Husserl zasílá Fregovi disertaci *Philosophie der Arithmetik*, Fregova recenze ovlivňuje H. postoj k psychologismu a nepřímo vznik fenomenologie o 10 let později
1903 Russellova *The Principles of Mathematics*, v dodatku uznává Fregovo prvenství
1910 Carnap studuje v Jeně
1911 Wittgenstein navštěvuje Frega, ten jej posílá za Russellem

Logicko-historické prerekvizity spisu

zařazení Fregovy *Begriffsschrift* do dějin logiky

ve vývoji moderní logiky identifikovatelné 4 tradice

algebraická	logicistická	matematická (axiomatická)	množinová
Boole	Frege	Dedekind	Cantor
Peirce	Russell	Peano	Zermelo
Schröder	Wittgenstein	Hilbert	Neumann

Leibnizova anticipace: podobnost schematického operování v matematice (číslovky) a logice (věty), přenesení jistoty matematiky do jiných oborů:

1) characteristica universalis – umělé písmo zachycující stavbu vět
2) calculus ratiocinator
   a) ars inveniendi – odvozování vět
   b) ars iudicandi – rozhodovací algoritmus

proti Descartově psychologistickému programu „jasného a zřetelného“ a odvrhnutí formální logiky hájí Leibniz význam přehledných schémat a jejich projekci na neuspořádané obory

vývoj interpretací kopuly v subjekt-predikátové formě

A *je* B

1) Aristoteles	mereologická interpretace kruh (třída) B obsahuje celé A
2) Kant, Leibniz	chemická resp. obsaženost v seznamu predikát B je obsažen v seznamu predikátů definujících A, tj. A=B&C&...

tomu odpovídá rozdíl

1) logiky rozsahu	rozsah je třída odpovídající A
2) logiky obsahu	obsah jsou kritéria vymezující rozsah nezávisle na situaci; pro A=B&C&...jsou definována dílčími predikáty B, C, ..., tzv znaky (Merkmal) pojmu A

Boolova algebra tříd, nejstarší tradice

překračuje aristotelskou logiku uvažováním výroků

1) primary propositions - vztahy pojmů (tříd)	(kategorické soudy Aristotelovy)
2) secondary propositions - vztahy vět	(hypotetické a disj. soudy Stoy)

uvažovány odděleně (secondary převáděny na primary), nelze současně

Frege: propojení obou typů

(Alík) je pes → (Alík) štěká	hypotetický soud
x je pes → x štěká	kategorický soud

algebra tříd pouze mereologické vztahy tříd, nemá vztah náležení prvku třídě, důsledek:

nerozlišuje	Sókratés je smrtelný	lidé jsou smrtelní
	předmět	pojem (třída)
	prvek	jednoprvková

důsledek agregativního pojetí pojmu (jednoprvková ani prázdná nejsou souhrny)

pojmové písmo nezačíná srovnáváním pojmů (tříd), ale větou a jejím rozpadem v souladu se substituční strategií: ve větách rozlišíme třídu jmen, substituovatelných výrazů; jejich vyjmutím z věty získáme substituční rámec - pojmové resp. relační slovo

Výklad (úvod) – povaha logiky

vztah logiky, matematiky a psychologie

názory na povahu logiky

(A) pravidla logiky jsou zákony myšlení,
(A1) jsou to přírodní zákony myšlení, tj. popisují, jak skutečně myslíme,
(A2) jsou to normativní zákony, tj. říkají, jak bychom měli myslet,
(B) pravidla logiky jsou nejobecnější přírodní zákony, tj. popisné zákony platící pro všechny předměty a situace,
(C) pravidla logiky jsou zákony popisných jazyků, zákony užití jejich slov a vět.

logika podobně jako etika preskriptivní – nepopisuje jak myslíme, ale přikazuje, jak bychom měli myslet (etika: ne jak se chováme, ale jak bychom měli)
(A1) psychologické, (B) deskriptivní, (C) identické s (A2), které Frege zastává (zdůvodníme později)

3 úvodní teze *Grundlagen* (s. XI)

(1) „*Je třeba od sebe ostře odlišovat psychologické od logického, subjektivní od objektivního,*
[(2)] *po významu slov je třeba se ptát v kontextu věty, nikoli izolovaně,*
[(3)] *je třeba mít na zřeteli rozdíl mezi pojmem a předmětem*."

vnitřně provázány
(1) a (3): je-li myšlení subjektivní, pak rozdíl mezi 2 a prvočíslem jen ve stupni zředění dané představy, nikoli logický (předmět vs pojem)
(2) s (3): rozdíl pojmu a předmětu má kořeny v rozpadu věty (větný holismus)
(2) s (1): (2) jako tzv. kontextuální teze představuje Fregovu odpověď na otázku jak je nám dáno číslo („*Stanovili jsme axiom, že význam slov není možné vysvětlit izolovaně, ale vždy v kontextu věty. Následováním tohoto axiomu se, jak věřím, lze vyhnout fyzikálnímu pojetí čísla, aniž bychom upadli v pojetí psychologické*.", § 106)

SHRNUTÍ Z 3. 3. 2003

Matematicko-historické prerekvizity,

zrod Begriffsschrift a Grundlagen z krize základů

1. krize v antice: objev iracionalit

v důsledku toho geometrizace aritmetiky; od Euklida a Aristotela je prototypem geometrické, a tedy spolehlivé a vědecky řádné metody
metoda axiomaticko-deduktivní; stavící na
1. na nedefinovatelných základních pojmech, přičemž
2. pro základní pojmy platí jisté nedokazatelné axiomy, z nichž ostatní věty odvozeny - první premisy (archai)

předpokládána logika; objev iracionalit ovšem ukazuje, že existuje praxe matematického (neschematického důkazu)
logika také není původně nástrojem matematiků, ale sofistů (eleaté), užívajících schematických forem úsudku k vyvození překvapivých, kontraintuitivních závěrů (Xenofanův důkaz věčnosti boha, Parmenidův neexistence změn)

předznamenání budoucího konfliktu:

matematika	logika
aktivita per se (Brouwer), důkazy z **názorných** demonstrací (z jednoho pro všechna) – konstruktivní metoda;	myšlení **diskurzivní** (z pojmů), bez vztahu ke zkušenosti;
epagoge (předvedení)	apagoge (odvedení)

novověké termíny indukce, dedukce významově neodpovídají; epagoge i apagoge obsahují deduktivní prvky, apagoge znamená spíše nepřímý (nekonstruktivní) důkaz; indukce vyhrazena empirickým (pravděpodobnostním) úsudkům

2. krize v novověku
antický ideál geometrické metody trvá - axiomatizace mechaniky (Descartes), etiky (Spinoza) a politiky (Hobbes)

Kant: odkud jistota vědy?, je **a priori** (předzkušenostní)
opakuje zjednodušené schéma *názorné vs. diskurzivní*:
narozdíl od **analytické** logiky (zákon sporu, diskurzivní) je matematika **syntetická**, založená na konstrukcích v čistém názoru (Anschauung, angl. intuition)
a) prostoru – geometrie
b) času - aritmetika

příznaky krize v analýze:
a) tři nesourodé tradice (1) ostrovní (Newton, kinematické prvky, odtud také asi Kantova závislost aritmetiky na čase), (2) kontinentální (Leibniz, nekonečně malé), (3) algebraická (Lagrange, proti názornému, tedy i geometrickému výkladu)
b) paradoxy analýzy: $1-1+1-1...=(1-1)+(1-1)...=0+0...0=1-(1-1)-(1-1)=1$
c) proti názornosti: spojitá funkce nederivovatelná v žádném bodě (Bolzano)

analýza není založena na geometrii, ta sama vyžaduje založení – neeuklidovské geometrie zpochybňují „naivně“ pojaté apriori euklidovských geometrických pravd (jediné myslitelné)

program základů analýzy
1. aritmetizace analýzy (reálná čísla jako množiny, Dedekind, Weierstrass, Cantor)

2. axiomatizace, ovšem konvenčně pojatá (Hilbertův obrat: není zapotřebí intucie, stačí bezespornost)

aritmetizace vyvolává otázky po jistotě aritmetiky
(1) na čem je založena aritmetika
úvodní otázka *Begriffsschrift* – aritmetika se neopírá o intuici, ale o logiku; definice následníka v řadě logickými prostředky – osvobození aritmetiky od názoru času (sukcese)
(2) co je číslo
vznik nových čísel
a) iracionality, kvadratická (čtvercová) čísla (řešitelnost $x^2=2$), transcendentální čísla (lze čísla reálná získat z racionálních přidáním odmocniny), komplexní čísla (řešitelnost $x^2=-1$, později geometrický výklad), hyperkomplexní čísla (nekomutují)

Fregovy otázky
1) lze postulováním řešitelnosti vytvářet čísla; existuje číslo splňující x+1=2, x+2=1?, námitka: úloha je sporná
2) je bezespornost kritériem existence?, různé bezesporné systémy které prakticky k ničemu
3) bezespornost + jisté obecné zákony (ale které – viz hyperkomplexní čísla)
4) a odkud berou tyto zákony svoji sílu (povaha)

Výklad (§1-4) – historie „analytického“

k povaze matematiky, matematického důkazu; historický v

§3 - modální charakterizace predikátů analytičnosti, syntetičnosti, aposteriri a apriori nepostihují obsah, ale oprávnění k jeho tvrzení

odpovídá Kantově pojetí modalit: modalita se netýká obsahu soudu, nýbrž našich důvodů pro jeho vynesení

klasifikace soudů v budově vědy	zákon	nutný (jistý)
	teorém	pravdivý
	hypotéza	možná

právě nutnost přírodních zákonů tradičním předmětem úvah a podkladem pro rozlišení pravd odlišného pramene poznání

1) Hume: všechny pravdy induktivní pravdy, nejisté, založené na zvyku
2) Kant: jak je přírodověda možná?; zákony nevyčítáme z přírody, nýbrž je přírodě předepisujeme;
jsou **apriori**, přezkušenostní, což lze chápat ve dvojím smyslu
   a) jediné možné (vrozené, evidentní, absolutně nutné)
   b) nevyvratitelné zkušeností (relativně nutné)
dva typy apriorních pravd

analytické	syntetické
nerozšiřující poznání, pravdivé na základě formy (zákon sporu)	rozšiřující poznání (predikát není obsažen v subjektu)
prototyp: zákony logiky	prototyp: zákony matematiky
jazyk	čistý názor
diskurzivní	názorné

od té doby spory

3) Bolzano – čistý názor sebedestruktivní, osvobození analýzy od názoru prostoru i času
4) Frege
   a) Kant má příliš úzký koncept analytického resp. logiky; aritmetika redukovatelná na logiku, není v ní ale obsažena jako trám v domě, nýbrž jako květina v semeni, tj naše poznání rozšiřuje
   b) geometrie zůstává syntetická apriori v prvním smyslu (neeuklidovská je alchymie)

5) pozitivisté
smysl mají jen věty empirické a věty logiky, tedy platí rovnice

apriori = analytické	věty logiky (matematika = logika)
aposteriori = syntetické	věty empirických věd

syntetické apriori = metafyzika, víra v nutně pravdivé, na zkušenosti nezávislé (rozumové) obsažné pravdy

6) Brouwer
aritmetika je syntetická a priori; nezávislá na logice, je výsledkem mentální konstrukce v čase (paradigma: zůstává názorné vs diskurzivní)
7) Lorenzen, Hilbert
sofistikovanější normace (viz dále)

Výklad (§5-17) – analytické vs. syntetické, apriori vs. aposteriori

problém analutického – shrnutí a rozšíření (průběžně, rozložené do komentáře), na závěr postaveno na kontrolovatelný základ (Lorenzen)

o je analytický výrok? (viz stejnojmenný sborník)

1) scholastika: propositiones per se notae (o sobě zřejmé výroky)
2) Kant (ve scholastické tradici): predikát v subjektu, nerozšiřující naše poznání, rys zřejmosti, jistoty (tato charakteristika problematická, neostrá)
3) Leibniz: **rozumové pravdy**, identity, jejich opak sporný, nutné (vs. faktuální, nahodilé, s možným opakem)

analytické = apriori
syntetické = aposteriori

4) Kant

syntetické – a priori i aposteriori

v této situaci začínáme číst A

Resumé a komentář

A) Číselné formule, dokazatelnost (Sind die Zahlformen beweisbar?)

§5 **KANT**: číselné formule jsou (a) **syntetické**, (b) bezprostředně jisté (indemonstrabilia = **nedokazatelné**), axiomy nejsou protože (c) nejsou obecné a (d) je jich nekonečno

Frege (Hankel): nekonečně mnoho nedokazatelných pravd odporuje přehlednosti [dnes nekonečno běžné, i když předpoklady na jeho povahu – OR resp. RS]
156678+67858=9887079 není bezprostředně evidentní (čistý názor?)

[Kant uznává a usuzuje z rovností velkých čísel na **syntetičnost**
sporný moment
evidence znakem analytičnosti, v rozporu s výše

Kant: nejedná se o analytické pravdy, je zapotřebí *konstrukce* v názoru (prostoru, času) KrVB15

topíme se v nevyjasněných vztazích
dokazatelné evidentní analytické

Kantova rovnice: (1) evidentní = nedokazatelné (dokazatelnosti netřeba)
(2) analytické je evidentní, ale i některé syntetické
(3) ? evidentní (jisté) = nutné (apriori); to je prosté uznání syntetických předzkušenostních pravd

najednou ovšem (4) ČF nejsou evidentní
z čehož usuzuje na (5) ČF jsou syntetické
tedy nový předpoklad (6) evidentní = analytické
užší pojetí evidence (nenázorná, diskurzivní), nezahrnuje konstruovatelné (vztah diskurzivního a názorného),
ale i to nutí revidovat nedokazatelnost, tedy bod (1), neboť ČF nedokazatelné, ale neev.

Frege: spíše to vyvrací nedokazatelnost, (vyjdeme-li z bodů (1-3), které tím zachovány)

SHRNUTÍ Z 10. 3. 2003

dokazatelnost, evidentnost a analytičnost Frege problematizuje, konkrétně rovnost
nedokazatelné = analytické
proto (§3)
analytické definováno jako dokazatelné, ale z logických zákonů
syntetický: nutné přidat pravdy spec. oboru
aritmetika obsažena v logice – je v jistém smyslu – ale ne jako trám v domě]

§6 **LEIBNIZ**: **dokazatelné**
2+2=4 není bezprostřední pravda

2+2=4
def. 1+1=2
2+1=3
3+1=4
axiom LP [pro výpočty – transformaci do stand. stavu nezbytný] (LP podle Leibnize axiom, ale lze i definice)
2+2=2+1+1=3+1=4

Frege [ale již Bolzano]: chybí asociativita a+(b+c)=a+(b+c)

čísla jsou nám dána rekurzivní definicí vzcházející z 1 a přičítání 1 (s)
[není jednoduchý důsledek Leibnize, rozdíl číslovky a čísla otázkou, nekonečně mnoho definic (jak dány?)]
číselné formule důsledky definic a obecných zákonů (asociativita)
také si to myslí
Grassman, (Hankel) zákon a+(b+1)=(a+b)+1 získán z definice sumy a+b: ten člen řady, pro nějž platí a+(b+1)=a+b+1
[opačný postup než Frege propaguje, zákon z definice!]
Frege a) divná definice, abych rozuměl výrazu a+(b+e), musím rozumět a, b, +, tj. i a+b (kompozicionalita významu, zásady definice – definiens musí být plně znám)
b) spíše míněna rekurzivní definice sčítání [nutno zpřehlednit: rekurze, =oper., PA, všude předpokládáno +1, resp. s]
c) i tak zůstává otázka, zda je podmínka (ten člen řady, který...) korektní deskripce, [otázka jak míněno: odvisí od pojmového rámce]
[pohybujeme se na úrovni prostých symbolů – definice číslovek, produkce vět, a jejich ohodnocení; rozdíl mezi generováním notace a čísel
problém definice sčítání

mluvíme přímo o číslech		začínat číslovkami	
	rekurze	indukce	axiomaticky
	$f_+(x, 0)=g(x)=x$	x+/=x/	x+0=x
	$(f_+(x, y+1)=h(x, y, f_+(x, y))=(x+y)+1$	x+y=z → x+y/=z/	x+s(y)=s(x+y)
předp.	s(y)=y+1	junkce s čárkou[1]	+, s funkce
+ funkce?			
	x+(y+1)=(x+y)+1	x+y/=z=(x+z)/	

a) garantuje definice rekurzí
b) co znamená, x+y=c a x+y=d, pak c=d (předtím bychom neměli užívat znak =), indukcí přes y (/); z ohodnocení komplexních termů pravidly lze dokázat komutativnost etc

[1] x0+1=1, x1+1=2, x2+1=3, ..., if x+1=y then x9+1=y0

S=m, T=n, m+n=p pak S+T=p; S=p, T=p pak S=T
c) záleží na tom, + funkční symbol takže se předpokládá, že mu odpovídá fce, pro kterou navíc P (ty by mohly být ovšem s funkcí neslučitelné x– pak sporný axiom. systém, neboť mu náleží i charakterizace f jako funkce; a+b=1=2 – předefinováno; typicky spíše nedodefinováno – neizomorfní funkce)

Frege ovšem: zkonstruuje čísla jako určité množiny, mezi nimi definuje relaci, o níž nutno dokázat, zda funkce]

§7 syntetičnost, analytičnost, apriori, aposteriori převeditelné na dokazatelnost z obecných zákonů

[návrat k expozé
5) empiristé – redukce rozumových pravd, analytického, apriori – všechno zkušenostní, syntetické, aposteriori

axiomy matematiky, geometrie, logiky zkušenostní pravdy
]
MILL: podobně jako Leibniz aritmetiku odvodit z definic,
ale: všechno vědění empirické
2+1=3 není jen definice, ale i **pozorování** (věta), totiž že skupinu tří věcí lze rozložit na dvě a jednu (F: předpokládá fyzickou dělitelnost, „+" lepidlo, zrakový vjem – 3 chutě, 3 údery se nehodí),
spjatost s pozorováním, ?velká čísla – nutné pozorovat 99999999 předmětů

[předznamenání vyvrácení empirické povahy čísla]
§8 jak pozorovat 0 kamínků, Mill možná označí 0 jenom za fikci, bez významu (jenom hra se symboly), ta hra ale význam má, tedy i 0, a ostatní číslovky, a tento význam, a to samostatný, nezávislý na smyslech
[proti formalistické matematice, Frege extrapoluje k mimojazykovému významu, předmětu, ne zcela oprávněné, Wittgenstein – význam číslovek není předmět, ale užití, role, jako šachová hra – formalismus?]

Millovo fyzikální pojetí jen u čísel do jisté výše [Husserl – *Philosophie der Arithmetik*], role zkušenosti v poznání matematických pravd
otázka po apriori – z**da aritmetika možná, aniž bychom měli vůbec zkušenost s předměty** (Kantův problém – všechno poznání začíná zkušeností, ale nepramení z ní)
špatně položeno, a priorní před zkušeností chápáno časově [lépe – podmiňující zkušenost, falešná představa o apriori, vrozené pravdy atd.]
kdybychom empirické definovali jako=vyžadující pozorování k pochopení obsahu, pak jsou empirické i fiktivní příběhy (o baronu Prášilovi, neboť mnohé muselo být pozorováno, než byly napsány)

B) Zákony, induktivnost (Sind die Gesetze der Arithmetik induktives Wahrheiten?)

§9 číselné formule odvoditelné z definic a obecných zákonů
[rekurzivní definice číslovky (+1), definice sčítání, LP pro složené výrazy – odpovídá Grassmanovi a Hankelovi (Lorenzen, u nichž asociativita dokazována; Frege ji předpokládá]
číselné zákony nejsou přírodní zákony (normativní prvek)

jak se domnívá Mill, sčítání neodpovídá pouze hromadění předmětů (kapka plus kapka), normativ
[§87 zákony čísel nejsou přírodní zákony – nevyžadují empirické ověření – jsou to zákony přírodních zákonů, apriori fyziky]

§10 aritmetické věty induktivní zákony?
z pozorování několika čísel usuzujeme na všechna

indukce vyžaduje stejnorodost, která podkladem zobecnění
Leibniz: A: jediné mody čísla jsou více méně, proto jednoduché jako geometrie
B: to platí o bodech, ale ne o číslech, které lze porovnávat dle mnoha vlastností
chybí podklad pro indukci
indukce empirická (vrtání díry)vs indukce matematická (konstrukce řady)
ie pouze vysokou pravděpodobnost, sama tedy matematiku předpokládá

§11 Leibniz – vrozené pravdy, není pravda, že vše co se učíme není vrozené

C) Syntetické apriori (Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch apriori oder analytisch?)

[návrat ke Kantově dělení, klasifikaci pravd na analytické ...]
§12 syntetické nejen aposteriori, ale i apriori (důvody minule)
Mill aposteoriori, vyloučeno, zbývá rozdíl Sa a A

[další rozdíl:
diskurzivní (*pojmové*) pravdy vs. z konstrukce v *názoru*
(minule apagoge, epagoge)
názor vs pojem
základní rozlišení, singulární a obecná představa
názor a pojem – dvě nutné složky empirického poznání (KrV)
„názor bez pojmu nepředstavuje poznání“ = soud, názor reflektovaná představa = Anschauungsurteil; představa je vždy představa něčeho (pojmu)
logika – pouze pojem vztah k rozumu
empirické vědy – vyžadují názor, vztah názoru k smyslovosti
– skrze něj dány empirické předměty
matematika – zabývá se **formou názoru,** časem a prostorem (empirické předměty nutně v prostoru a čase), (aprirorní podmínky toho, aby reprezentace označovala emp. předmět – identifikovatelnost v prostoru a čase)
prostor a čas samy v singuláru (jeden prostor, jeden čas)
– čisté názory, v nichž konstruovány matematické objekty [Strawson]
to zajišťuje apriornost, jistotu matematiky]

transcendentální estetika (forma a podmínky smyslového poznání); názor vázaný na smysly psychologicky omezený (100000 knih, schopnost mysli něco nazřít, Husserl – jak si představit velké množství lidí), logický předmět širší

§13 nepřehánět spojitost s geometrií [= s její názorností] stejnorodost bodů, ... (Leibniz) odkazuje k potřebě názoru, zatímco matematiky pestrostí předmětů a vlastností poukazuje na jejich samostatnost, nezávislost

§14 proti empiričnosti a syntetičnosti aritmetiky již široká aplikovatelnost

geometrie ovládá prostor názorného (fantazie nejsou proti geometrii, negeometrický svět si můžeme jen myslet, ne představovat
[apriornost geometrie, absolutní výklad apriori
jediné možné, nemyslitelné (=nepředstavitelné) jinak, vrozené
a priori
relativně nutné, nevyvratitelné zkušeností, ale nahraditelné]
neeuklidovské geometrie jdou proti představivosti, a nejsou apriori

aritmetika ovládá sféru počitatelného, a to je širší než názorného
je tedy spjata s myslitelným nejen s představitelným, tedy se zákony myšlení (logikou)

§15 Leibniz: apriori (nutné) = analytické, logicismus
nutné pravdy převeditelné na identity; ztrácí na hodnotě: všechny pravdy dokazatelné

§16 Jevons: číslo je logické rozlišení a algebra jen vysoce rozvinutá logika
? aritmetické věty samé identity, bezobsažné jako logika

Mill proti logické povaze matematiky – pouhým studiem operování s jazykem nelze odhalit skryté přírodní zákony
[1] několik věcí smíšeno – (a) logika = studium operování jazyka, pravidel jeho užití, (b) matematika = obecná přírodověda
Frege se vyhraňuje vůči (b) a říká, že (i) je nutné rozdělit aplikaci matematiky od matematiky samostatné, a (ii) popírá v tomto samostatném užití omezuje na pouhé operování se symboly – má samostatný význam
[(a) je pozoruhodná anticipace vývoje analytického
6) pozitivistická specifikace analytického (ala Wittgenstein)
syntetické – týkající se světa objektsprache
analytické – týkající se jazyka, ústící v tautologie metasprache
věda studium světa
filosofie studium jazyka
analytické aposteriori jak fakticky užíváme jazyk (Carnap – tautologičnost je syntaktická charakteristika věty)
jak bychom měli užívat jazyk (Ayer)]

§ 17 [počátek zmatený, hovoří se o indukci, ale; nenechat se zmást]
číselné zákony jsou obsaženy v logických, i když ne evidentně, je tedy zapotřebí provést jisté transformace a tím aplikovat názor, empirickou kontrolu
ta ale na úrovni „kunstfertiges Handhaben der Sprache“, a matematika analytická (Lorenzen – formální)další vývoj pojmů
sofistikované
1) apriori – nevyvratitelné zkušeností, podmiňující, konstituující tutéž
2) podle empiristů jsou všechny zákony aposteriori a syntetické (induktivní pravdy), ale alespoň indukce apriori
Poincaré - syntetická apriori

Rekonstrukce ortoretmínů syntetického etc.

věty a argumenty (úsudky) nevynášíme jen tak (tapetování stěn), ale vůči někomu
ve společenské praxi udávání a vyžadování důvodů, inferenčních závazků (Brandom)
logika normativem této praxe, regulativem rozumného dialogu

význam spojek, pravdivost složených vět lze zavést dialogicky, nikoli staticky (shodou věty se skutečností), ale moment sociální praxe

každá výpověď tohoto typu je tvrzena někým vůči někomu, tedy v dialogu, zaváží se oba partneři, proponent a oponent, k respektování následujících konvencí: přičemž o větách A, B … již panuje co do kontroly shoda, vynesením věty se zavazuje že na útok oponenta bude reagovat určitým způsobem

tvrzení	útok	obhajoba
$A \vee B$	?	A
$A \vee B$	?	B
$A \wedge B$	L?	A
$A \wedge B$	R?	B
$A \rightarrow B$	A?	B
$\neg A$	A?	
$V_x\, A(x)$	?	A(N)
$\Lambda_x\, A(x)$	N?	A(N)

Vezměme jako příklad větu: "všichni ateisté jsou zlovolní nebo slabomyslní". Tato věta má formu $\Lambda_x.A(x) \rightarrow Z(x) \vee S(x)$. a dialogická hra může probíhat takto:

	oponent	proponent
1.		$\Lambda_x.A(x) \rightarrow Z(x) \vee S(x)$.
2.	lord Russell ?	$A(R) \rightarrow Z(R) \vee S(R)$
3.	A(R) ?	?
4.	…..	$Z(R) \vee S(R)$
5.	?	Z(R)
6.	?	…..

v (3) a (6) napadení nesložených vět
vymyslet jak postupovat aby dialog terminoval (O útočí na první větu různými jmény)

General Rule (G) — každý hráč buď napadne tezi, kterou v předcházejícím tahu tvrdil protihráč, nebo se hájí proti výpadu, který protihráč v předcházejícím tahu učinil.

Winning Rule (W) — proponent vyhrál, jestliže obhájil napadený elementární výrok nebo když oponent napadený elementární výrok neobhájil. (totéž pro oponenta při G)

jedna z možností implikace

SHRNUTÍ Z 10. 3. 2003

1.		$A \to B$		$A \to B$
2.	A?	?	A?	B
3.			?	

Proponent vyhraje umí-li obhájit B nebo ví-li, že oponent neumí obhájit A. Uvažme však implikaci z příkladu o Russellovi.
Zdálo by se totiž, že než se P pustí do obhajoby B má se právo zeptat na A tvrzené O (Russell). Za předpokladu W-definitnosti podobné úvahy nehrají příliš velkou roli, neboť proponent ví předem, zda je oponentovo tvrzení pravdivé či nikoli a podle může toho volit buď obhajobu nebo útok. U tvrzení komplikovanějších ("x je prvočíslo") než je zde uvedené by tak ale na sebe musel vzít tíhu ověření oponentem tvrzeného předpokladu. :

(G') proponent může buď napadnout některou z oponentem tvrzených tezí, nebo se hájit vůči poslednímu oponentovu útoku; pro oponenta zůstává v platnosti pravidlo (G).

Tomuto pravidlu se říká konstruktivní, zatímco pravidlu (G) přísně konstruktivní. Další liberalizací lze získat tzv. obecné pravidlo klasické:

(G") proponent může buď napadnout některou z oponentových tezí nebo se hájit vůči některému oponentovu útoku; pro oponenta zůstává v platnosti opět pravidlo (G).

Pro tvrzení formy $\neg A \vee B$ bude průběh konstruktivního dialogu totožný s dialogem přísně konstruktivním (útok na disjunkci není posledním útokem), pro elementární A, B se průběh konstruktivního dialogu o $A \to B$ mění:

1.		$A \to B$	
2.	A ?	?	
3.	(A)	B	(2)

Pravdivou nazveme větu pro níž existuje vítězná strategie vůči libovolnému oponentovi.
Nechť je A nějaká elementární věta, uvažme nyní dialog pro větu $A \to A$:

1.		$A \to A$	
2.	A ?	A	
3.	?	?	?2
	(A)		

Nepodaří-li se mu větu A obhájit, pak proponent vyhrál, v opačném případě stačí oponentovi obhajobu zopakovat; tato věta je tedy konstruktivně pravdivá. Na rozdíl od předchozího případu však ve své strategii proponent nepoužívá žádnou znalost věty A - dialog dokáže vyhrát pro libovolné (elementární) tvrzení; pouze se znalostí pravidel. (Ale i pro neelementární, stačí jen zrcadlově opakovat tahy oponenta, dokud se nedojde k elementárním formulím).
výhra pouze na základě znalosti pravidel

Dialogická logika vyrůstá z operativní matematiky. **Zatímco předmětem metamatematiky jsou určité kalkuly, jsou předmětem operativní matematiky kalkuly libovolné** (Curry) (tím není řečeno že op. matematiky vyčerpává matematiku celou).
kalkul – schéma pro generování figur
Sepíšeme kalkuly:

[1] $\Rightarrow |$
$n \Rightarrow n|$

[=] $\Rightarrow | = |$
$x = y \Rightarrow x| = y|$

[<] $\Rightarrow | < x|$
$x < y \Rightarrow x| < y|$

(K+) $\Rightarrow a + | = a|$
$a + b = \mathrm{c} \Rightarrow a + b| = c|$

na jejich bázi zdůvodníme (založíme pravdivost) vět elementární matematiky

(Kantovo Handlungsschema, návod k jednání, o něj se opírají mat. pravdy, nikoli o věčnost; nekonečno je formou rekurze)

$x < y \equiv \vdash_{[<]} x < y$ atd.

Tvrzení elementární věty je tedy tvrzením konstruovatelnosti. Již důkazy neodvoditelnosti ukazují, že důkaz je nutné chápat šířeji nežli jen jako mechanické operování s figurami.

příkladem principu platného pro každá kalkul

Princip indukce Mějme kalkul L s počátky $A_1, A_2, \dots$ a pravidly:

$$B_1 \Rightarrow C_1$$
$$B_2 \Rightarrow C_2$$
$$\vdots$$

a proměnnou s, jejímž oborem jsou figury odvoditelné v tomto kalkulu, pak pro každý kalkul M a každou jeho formuli D(s) platí:

$$D(A_1); D(A_2); \dots; D(B_1) \Rightarrow D(C_1); D(B_2) \Rightarrow D(C_2); \dots \vdash_M D(s).$$

Vztáhneme-li objektovou proměnnou s na kalkul [1], generující přirozená čísla, pak má tento princip formu:

(A2) $$A(\mid); A(x) \Rightarrow A(x\mid) \vdash [1]\ A(s)$$

oproti axiomatické metodě či tvrzení, že indukce je neobhajitelná (kruh v metajazyku), mu ji dokážeme, ukážeme strategii jak hájit v dialogu

ovšem ve formě věty – zatím řeč o kalkulech, přechod k logice přes řeč o přípustnosti pravidel (Regellogik, opusťme), uvažujme ve formě implikace

1.	$A(\mid)$	$\Lambda_y A(y)$.	
2.	$\Lambda_x A(x) \rightarrow A(x\mid)$		
3.	$\mid\mid\mid$?	$A(\mid\mid\mid)$	
4.	?	$\mid$?	?2
5.	$A(\mid) \rightarrow A(\mid\mid)$	$A(\mid)$?	?5
6.	$A(\mid\mid)$	$\mid\mid$?	?2
7.	$A(\mid\mid) \rightarrow A(\mid\mid\mid)$	$A(\mid\mid)$?	?7
	$A(\mid\mid\mid)$	$A(\mid\mid\mid)$	(3)

dialog uzavřen jako ve formální hře

nevyužili jsme jen pravidla, ale konstrukci číselné řady (mimologický kalkul)elementární

vidíme tedy:

věty aritmetiky obhajitelné konstrukcí (nebo její nerealizovatelností)

konstruktivní, syntetické

přesto blízké logice, neboť se opírají jen o jisté kalkuly a práci s nimi

čtyři druhy apriori

a) formálně syntetické	aritmetika	
b) formálně analytické	logické pravdy	
	definice	starý mládenec = neženatý muž
c) materiálně analytické	predikátorová pravidla	
		štěká pak pes (lvi neštěkají)

	(pragmatické, nelze je vyvrátit zkušeností, i když s ní souvisí; nepůjdeme ověřovat stejně jako fa, ale naučili jsme se na ní)
d) materiálně syntetické	geometrie

Výklad (§18-27) –o bjektivní vs. skutečné a subjektivní, platonismus

II část (Mínění spisovatelů a pojmu čísla) – preliminaria odpovědi na otázku „co je číslo“ resp. o čem mluvíme, jakou strukturu má věta, že tam a tam je určitý počet věcí
Anzahl, Number, počet, kardinální číslo (§4 – úkolem knihy Anzahl, kladné celé číslo – omyl, nezáporné); odpověď na otázku „kolik“

Komentář

§18 čísla z 1 a +1, tyto třeba vysvětlit (Leibniz, Mill, Grassmann)
ČF z definic a obecných vět,
[obecné věty

1) (Leibniz) např. asociativní zákon, (Grassman, Hankel) ten lze ovšem dokázat z definice sčítání primitivní rekurzí a+(b+1)=(a+b)+1, (korektní?) pak je obecnou větou zákon tuto rekurzi obhajující resp. garantující korektnost rekurze (Dedekind dokázal teorém existence jedinečné funkce);
2) Lorenzen korektnost definice sčítání a na ní založenou asociativitu obhajuje indukcí, kterou ovšem dokazuje v dialogu; výsledek opačný Fregovi – syntetická aritmetika; všechna tvrzení z definic kalkulů
3) axiomatický přístup – asociativita dokázána z definice sčítání + schématu indukce (OV); schéma analytické – Poincaré syntetické apriorii

pohybuje se mezi
radikálně konstruktivní (operativní) a axiomatickou metodou
viz minule kalkul axiom
teorie rekurze mezi
ta má konstruktivní bázi – všechny rekurzivní funkce jsou konstruovány via možné jméno (funkce jako konstrukce a jako graf – kritéria identity)
Fregovo místo těžko identifikovatelné
čísla konstruuje, a to v syntakticky vystavěném systému (co funkce to jméno)
GG jsou prezentovány axiomaticky, tyto však nemají charakter schémat, ale pravdivých vět
blízko naivní teorii množin
]
odtud i: obecné věty z **pojmu čísla** (jisté množiny, sčítání jako sjednocení, převedeno na logické zákony a operace)

§19 proti pokusům o geometrické pojetí čísla [Fregův poslední pokus z roku 1924 geometrický byl]
Newton – číslo je vztah veličiny k jiné, chápané jako jednotka [vztah uhlopříčky jednotkového čtverce ke straně je odmocnina ze 2; Fregův způsob definice reálných čísel v GG],
příliš široké, Anzahl – odpověď na otázku kolik, vyjadřují počet
Masszahl - jak velká je veličina ve vztahu k veličině jednotkové, vyjadřují míru
[není správné začít tím nejobecnějším . 1924 ano, geometricky a pak ke komplexním, nyní] definice čísla v užším smyslu se vyplatí,

1) Euklidés definuje pojem „rovnosti poměrů délek“ z „Gleichvielfachen“, a to lze převést na rovnost čísel[2]

[2] 2/5 a 3/4 násobeny 2/1, tj. horní resp. dolní členy „Gleichvielfachem“; 4/5 a 6/4, kdy 2< 5 zachováno 4<5, ale 2>1 přešlo v 6 >4

2) zůstává problém takto definovaného čísla k číslu běžné početní praxe; geometrické číslo před otázkou – kolik?, zatímco takto definované může odpovědět kolik jednotek je v délce
3) redukce racionálních, iracionálních ... na celá
[každé reálné určuje řez na racionálních, reálná čísla uchopena jako řezy rac.- posloupnost lepších odhadů]

§20 **definovatelnost čísla**

Hankel to, že lze něco 1, 2, 3 krát položit nelze obejít

Leibniz adekvátní idea – velmi zřetelná

nedefinovatelnost čísla je spíše znakem neúspěšného pokusu o definici

A) Číslo jako vlastnost vnějších (empirických) předmětů

zdravé jádro zkoumání – čemu přísluší (zukommen) číslo, o čem je číslo, čemu je číslo připisováno (beigelegt)

§21 studium běžného užití čísla **adjektivní** – význam atributu, stromů je pět,
oproti matematickému **substantivní** 5=2+3

z toho hypotéza: A) v adj. užíváno analogicky k stromy jsou zelené

z toho: B) **číslo je vlastností empirického předmětu**

M. Cantor, Schröder – číslo abstrahováno z vnějších věcí (proto aplikovatelné na svět), jedničky z jednotek abstrakcí od zvláštních vlastností a reflexí na jejich četnost

§22 1) proti B) (Bauman) přípis čísla je přípis empirické vlastnosti
smyslové předměty nepředstavují pevné jednotky, pouze body, které lze pojímat jako jedno i jako mnohé
Ilias – barva, tvrdost zůstává pevná
- pojetím jedna báseň, 24 zpěvů, velký počet veršů
2) proti A) čísla nejsou připisována distributivně

předložením samotného balíčku karet není dána odpověď na otázku „kolik?“

nutno říci – kolik čeho; tím předznamenána odpověď na otázku čemu je připisováno číslo pojmu, a to sortálnímu, s diskrétní, a proto počitatelnou extenzí

[z toho si lze v předstihu odnést

1) neurčitost deixe – Quine

k udání významu: toto je Nil + gesto nestačí, nutné více reprezentací (toto je Nil, toto již ne ...), triangulace významu, kritéria identity role pro konstituci předmětu

toto je „Vojna a mír“ titul toto také
výtisk toto ne, jen vypadá jako ta ze včera

při vlastní reifikaci, fixování významu, stačí říci
tento titul je Vojna a mír
tato řeka (ne její rameno) je Nil

doprovodit gesto sortálním predikátem, pro nějž již specifikována kritéria identity

má diskrétní, počtem definitní extenzi (výtisky a tituly mé knihovny se liší)

vs látkový term, vše červené u mě doma (dělením červeného opět červené, králíka králík nikoli)

2) potřeba pojmu při poznání, nestačí pouze singulární reprezentace, aby vyjádřily poznání (Objektivbezug) – doprovozeny pojmem (představa čeho?); teprve názor a pojem dají dohromady soud]

jestliže témuž předmětu (reprezentaci) mohu tímtéž právem připisovat různé vlastnosti, není jejich nositelem – fyzický předmět tedy není nositelem čísla

§23 Mill – číslo označuje vlastnost, náležející (empirickému) **agregátu**, která ho spojila nebo rozložila charakteristickým způsobem

[rozlišit a) číslo přísluší agregátu
b) agregátu fyzických předmětů
to, že **číslo náleží souboru jako celku** je jediný seriózní rival Fregova pojetí, vyřízený později, číslo agregátu, agregát čeho?
to druhé je naivně-empirická agregativní koncepce množiny – soubor předmětů, když ne fyzicky, tak alespoň mentálně spjatých]

musí být věci spojeny (svázány dohromady) aby mohly být počítány
počet zajíců, počet slepých v Říši, přestane být sto stébel po rozvázání sto stébel

§24 proti fyzikálnímu pojetí – velká **aplikovatelnost** čísla
Locke - počítat lze lidi, anděle, jednání, každou existující věc
Leibniz – proti scholastikům je věc aplikovatelná i na netělesné věci
to svědčí proti jeho abstrahovanosti z fyzikálních věcí

§25 Mill – **číslo je fyzikální fenomén**: tři jablka se od dvou empiricky liší
1) znovu neurčitost deixe: jeden pár bot se od dvou bot empiricky neliší, knihy mé knihovny
2) dva pojmy od tří také ne

Berkeley – číslo vzniká v nás, záleží na našem pojetí [co na jevu počítáme]
cesta k subjektivnímu zakotvení čísla

B) Číslo jako něco subjektivního

§26 zkoumáním jak v nás vzniklo dopějeme k jeho definici

proti psychologismu, vnitřní introspekcí nezjistíme žádné vlastnosti čísel
„číslo je tak málo předmětem psychologie jako Severní moře“, o němž se také nic nedovíme z psýché mořeplavců

[
Fregeho téma, první zásada – odlišovat psychologické a logické, subjektivní a objektivní

východiska psychologické sémantiky, novověké filosofie zaměřené na subjekt

subjektivní	objektivní
mysl	svět
jisté (nepochybné)	pochybné

novověké odmítnutí metafyziky
svět empirické zkušenosti zůstává pomíjivý, nejistý
jistotu věčného světa platónských idejí nahrazuje jistota světa idejí ve smyslu subjektivních představ;

svět představ svět předmětů

zde se odehrává **myšlení**, je sférou smyslu, obsahu našich vět
myšlení = představování, srovnávání představ
myslíme si, že Petr Veliký založil Petrohradu, spojíme představy Petra, zakládání, a Petrohradu, větou pak vyvoláváme tutéž představu v druhých, ti nám pak rozumí (jak nese myšlenka informaci?)

úvahy v abstraktních oborech, čísla nejsou vidět, jsou to představy
matematika = mentální aktivita (Brouwer)

pasuje do dělení

matematika je jistá, a tedy subjektivní	svět nejistý, tedy objektivní

Frege poukazuje

A) subjektivní, podléhá naší libovůli,	B) „Severní moře je 10000 mil dlouhé“
je na nás **závislý**	**nezávislé** co si představujeme
má představa slona se mění ze žluté na růžovou	a myslíme (Bolzanova věta o sobě)
existence představy	existence Severního moře
to že je tak a tak barevná	platnost věty
(i zde je platnost v jistém smyslu nezávislá!)	

C) velikost moře, platnost Goldbachovy domněnky, existence sudého čísla, které není součtem dvou prvočísel
podobá se spíše pravé straně,

zaprvé je nutná diferenciace světů

skutečné nevyčerpává objektivní

subjektivní	objektivní	
vnitřní svět představ	skutečné	neskutečné]

„*Rozlišuji objektivní od toho, na co si je možné sáhnout rukou, od prostorového, skutečného. Zemská osa či střed hmoty slunečního systému jsou objektivní, ale nerad bych je nazýval skutečnými tak jako samotnou Zemi.*“ [GL, § 26]

Země	rovník

je myšlená, ale nikoli vymyšlená čára (výkladový moment, nikoli ad hoc fantazie), není myšlením vytvořená, ale jen uchopená, objevená, jako Nordsee či číslo jistého typu

platí artikulace

závislosti	nezávislosti na libovůli jednotlivce

extrapolace k platonismu
čísla, abstraktní objekty nezávisle bytující objekty, které jsou námi jen nahlíženy, objevovány a uchopovány
proti tomu hájím: Frege vyjadřuje negativní stanovisko vůči psychologismu, artikuluje pojmové rozdíly, nikoli zprávy ze zásvětí – časová nezávislost znamená tolik, že narozdíl

	Měl jsem tehdy hlad
je u věty	GD

zbytná specifikace toho, kdy a kdo ji pronesl

Frege úvahy o objektivních, leč neskutečných předmětech v souvislosti s komunikační rolí věty
toto tvrzené je to, čemu musí být rozuměno, je to intersubjektivní korelát věty, **tzv. myšlenka**
uvážíme-li představu – něco, co někdo má, co ale právě proto nemůže sdílet s jinými (Wittgensteinovy úvahy o bolesti – nemůžeš mít moji bolest)
„*K tomu by bylo zapotřebí sjednotit smyslové vjemy náležící dvěma různým vědomím ve vědomí jediném. I kdyby ale bylo možné nechat z jednoho vědomí představu zmizet a v druhém ji objevit, přece zůstává ještě nezodpovězena otázka, zda by se jednalo o tutéž představu*." (§27)
oproti tomu obsah věty, myšlenka je všem přístupná
– to není platonistické tvrzení, ale negativní vymezení, rozdíl, vycházející z fungující praxe dorozumění, která je brána jednoduše jako fakt

to, co je vyjádřeno Pythagorovou větou
není mým výhradním vlastnictvím, mimo prostor a čas, bez vůně, nehmatatelné
svět 1 svět 2

je nutné uznat svět 3
přístupné mysli – myšlení možná s představováním nutně spjaté, ale liší se, představy „máme", myšlenek se „chápeme"

nezávislost na libovůli jednotlivého člověka,
týká se obsahu (to, že ...), pravdivosti vět
existence řešení jistých rovnic, čísel; významů slov
ale ne na člověku vůbec (což je Fregovi mylně připisováno, **ontologický platonismus**)

pod slovem „pes" si můžeme představit libovolného chlupáče, ale význam slova změnit nemůžeme, protože je dán určitou praxí (Protágorás – homo menzura)
v jejím rámci můžeme tento význam objevit, ne si ho vymyslet
to, že je význam slov nezávislý na jedinci, znamená, že žije v praxi běžné komunikace, čtení, výkladu textů apod. – není spojen s výrazem jako s muzejní nálepkou (fyzická blízkost, ID)

oprávněnost tohoto **sémantického platonismu** potvrzuje Frege sám **definicí objektivního**
„*Objektivní je* [...] *zákonité, pojmové, souditelné, to, co lze vyjádřit slovy.* [...]"
„*Objektivitou rozumím tedy nezávislost na našem vnímání, nazírání a na našich představách, na rozvrhu vnitřních obrazů ze vzpomínek dřívějších počitků, nikoli však nezávislost na našem rozumu* [sic!]*; neboť zodpovědět otázku, co věci jsou, nezávisle na rozumu, by znamenalo soudit, aniž bychom soudili, prát kožich, aniž bychom jej namočili*."

svět 1	svět 2	svět 3
závislý na subjektu	závislý na jazyku (rozumu).................	
	objektivní = intersubjektivní	

problém fregovské interpretace

SHRNUTÍ ZE 17. 3. 2003

1) platí závislost pro svět 2?, ano, je-li vykládán transcendentálně, tj. svět podmíněn apriorními strukturami našeho jazyka (subjektpredikátová forma, dělení na předmět – théma, a jej rozvíjející přívlastek – rhéma)
2) rozdělení obsahu na smysl a význam; předmět a pojem

jméno	pojmové slovo	věta	vyjadřuje
smysl	smysl	myšlenka	určuje (zp. danosti)
předmět (spadá pod)	pojem	pravdivostní hodnota	

význam jména je předmět, predikátu pojem

	svět 1	svět 2	svět 3
	představa		smysl (to čemu na větě rozumíme)
		význam (Napoleon)	význam (5, pes)
		(emp.) předmět	(abstr.) předmět, pojem
Wittgenstein		význam cosi co nelze rozbít (Napoleon je mrtvý)	
		nositel	význam
		empirický př.	logický předmět
			fiktivní předměty

zprvu jsou všechny předměty fiktivní, jediné co o nich víme je platnost jistých vět
realita není logický pojem, je to saturovaná možnost; rozdíl empirický a abstraktní logika nezná
3) rozdíl smyslu a významu problematický
svět vs jazyk
vyjadřované, směřující mimo jazyk (primární role) vs jazyk a jeho užití
vyjadřované vs pravdivostní podmínky tohoto vyjaření
(smysl je způsob danosti významu, myšlenka je smysl věty, její význam je WP, myšlenka jsou pravdivostní podmínky věty)
]

Kant: prostor náleží názoru (je jeho formou), jak se nám zjevuje svět
[– subjektivní výklad apriori; to že se všem jeví stejně je kontingentní věc daná vývojem]
přesto je na něm něco objektivního – všichni uznáváme tytéž axiomy pro orientaci ve světě

»*Objektivní je* [...] *zákonité, pojmové, souditelné, to, co lze vyjádřit slovy.* [...]
[Kant přejal zčásti novověkou dichotomii

názor (představa) – způsob jak věci dány, nezávisle jak jsou		o sobě
dány v prostoru a čase		mimo p a č
n sám je subjektivní	k objektivnímu poznání zapotřebí	pojem
názorné		diskurzivní
smysly		rozum

výsledná rovnice (aproximace)
názorné = subjektivní diskurzivní = objektivní
]
čistý názor mimoverbální [proto geometrie syntetická, zatímco aritmetika a logika analytická; analytické vs syntetické odpovídá názorné vs diskurzivní]
čistá názor nesdělitelný [neobjektivní, tj. je subjektivní charakteristika]
příklady z projektivní geometrie (studium vlastností figur s ohledem na polohu, nikoli měřítko; projektivní vlastnosti – invarianty projekce)

SHRNUTÍ ZE 17. 3. 2003

princip duality: nahraditelnost pojmových dvojic salva veritate (bod za rovina a vv, přímka za přímka, spojuje za protínají se a vv; „dva body určují přímku s, která je spojuje“, dvě roviny určují přímku v níž se protínají“
[Hilbertovy implicitní definice: základní objekty lhostejné (dříve pevně definované, dané názorem), axiomaticky popsány vztahy, kostra mezi nimi – Wissenschaft ist Struturwissenschaft], pod body míníme body i roviny, přímka spojující body odpovídá průsečnici rovin

[nejasné: ?
objektivnímu odpovídají jazykem vyjádřitelné, neměnné vztahy (strukturální vlastnosti)
subjektivnímu geometrické předměty (body, přímky)
pod bodem si představuje ten to a ten ono,
objektivní je invariant daný axiomy – to co o bodech platí (že dva určují přímku, ty že se protínají v jedno atd]

význam slova „bílý“
věta „toto je červené“

subjektivní	objektivní
smyslová kvalita, moje	je mi rozuměno
nevyvratitelné (nepochybné)	korigovatelné, je možné říci: jeví se
nemá charakter sdělení	mi to jako červené, ale je to ve sku-
	tečnosti bílé
	objektivní = sdělitelné
jen moje	dáno všanc porozumění, a tedy i kritice
	druhých, identifikovatelné
	(i slepý rozumí červenému)

§27 Schloemilch – číslo je představa místa objektu v řadě
kdyby číslo představa, byla by aritmetika psychologie, což je stejně málo jako astronomie
dvě představy – pak moje, nemohu sdílet, každý svoje dvě

Kant		představa		
	subjektivní		objektivní	
Frege			předmět	pojem
	psychologie		logika	

shrnutí, co číslo není

- představa (halucinace)
- prostorové, fyzikální (mohlo by shořet)
- subjektivní
- skutečné (smyslům přístupné)

C) Číslo jako agregát (množina)

viz příště
mnohost (Vielheit, Mehrheit)
vynechána 0, 1

SHRNUTÍ ZE 17. 3. 2003

„houf“, „agregát“, „grupa“ neurčité, vázané na prostorovu blízkost; nejsou to logické pojmy

dvě agregativní koncepce; číslo jako skupina

1) čítaných předmětů
2) tyto předměty zastupujících jednotek

Výklad (§28-44) - pojem a jeho abstrakce

shrnutí dosavadního
I mínění o povaze aritmetických vět; dokazatelné, analytické
II mínění o povaze čísla
začátek odpovědi na hlavní otázku spisu: "co je (kardinální) číslo"
reformulováno: o čem je číslo (výpověď čísla - Zahlangabe), čemu je připisováno číslo

už sama otázka prezentuje číslo jako vlastnost; tuto představu potvrzuje i studium adjektivního užití čísla – těch stromů je 5
úvaha začíná: jsou věty analogické
těch stromů je 5, ty stromy jsou zelené

a) **ne**, není distributivní
b) narozdíl od „zelené" není získáno abstrakcí z empirických předmětů; argument neurčitostí (balíček karet): empirický předmět je jedno i mnohé
   není vlastností empirických předmětů

hluboké pozorování, potíž s přehledným výkladem
z a) by šlo usoudit (Mill) že **číslo náleží agregátu předmětů jakožto celku**

série argumentů a problémů (průběžným, implicitním) poukazem na vágnost termínu **„agregát"**

1) nejnaivnější představa fyzicky blízkého uskupení – skupinka šovinistů (předpokládána fyzická blízkost, Le Pen, Klaus, ...; skupinka koťátek – v košíčku) není podmínkou počítání – hovoříme o počtu obyvatel Německa, ale nemusíme je kvůli tomu shánět dohromady, svážet z Kanárských ostrovů atd.
2) co dělá nějaké předmětů třídou?
   - fyzická blízkost to není
   - zcela libovolný akt mysli; tvoří např. Napoleon, hořící vesnice a Měsíc přirozený souhrn

   otázka po tom, co je (zdánlivě triviální): židle, atomy tvořící židli, rozbitá židle, roztroušená rozbitá židle, spálená židle
3) **je souhrn fyzických předmětů fyzický předmět?** (což je Millova domněnka), kdyby ano, pak se na něj vztahuje námitka s neurčitostí – je jedním a zároveň mnohým; a číslo se k němu nevztahuje
4) **existuje skupina předmětů stejným způsobem jako tyto předměty samotné?**, ne, je to abstraktní předmět, s jinými kritérii identity; proto i kdybychom vykázali číslo jako vlastnost takovéhoto agregátu, nebyla by to vlastnost fyzických předmětů
5) právě neurčitost deixe ukazuje, že i empirické předměty jsou do skupiny vázány pojmem,
   skutečnost, má-li být počítána, chápána jako souhrn jistého pevného čísla, musí být pojmově členěna
   o souhrnech abstraktních předmětů to platí triviálně;
   máme-li agregát, je to vždy agregát *něčeho* sortální pojem
   nelze říci jen *tento* agregát agregát *čeho* myslíte

III. Meinungen über Einheit und Eins
podrobněji k agregativním koncepcím čísla

uvažované možnosti
1) číslo jako vlastnost agregátu
2) číslo jako agregát sám (§28)
   1) číslo jako skupina čítaných předmětů
   2) tyto předměty zastupujících jednotek (Euklidés)

v tomto bodě se slučuje, proč
oddíl formálně věnován jednotce, jak užíváno slovo „jeden“, „jednotka“[důvodem i to, že číslo definováno přes 1 a +1, tedy specializace obecné otázky: "o čem je číslo" jako „o čem je 1“]

Komentář

A) Vyjadřuje číslovka „jeden“ (Ein) vlastnost předmětů

Einheit - jednotka (to, co je jedno) oproti Vielheit (mnohost, skupina věcí)
Eins - jednička, číslovka jedna
§29 Euklidés – monás (1) počítaný předmět,(2) jeho vlastnost (3) číslo 1

[opakování úvah proti číslu jako empirické vlastnosti]

A) platí analogie: jedno město = moudrý člověk?
a) kdyby ano, pak vlastnost, kterou má každý
věta „Solón je moudrý“ má smysl, protože něco není moudré [tautologie nemají smysl – Wittgenstein; smysl = kontingence]

tradiční poučka: obsah pojmu umenšuje růst rozsahu
zvíře - schopné žít na suchu - schopné žít ve vodě = obojživelník
b) Solón byl jeden [co?, nevytknutelnost, opak distributivity]
plurál: Solón byl jeden, Thalés byl jeden, ergo Solón a Thalés byli jeden

§30
B) není empirickou vlastností
a) [neurčitost deixe]
Baumann: jedno je, co je jako jedno uchopeno
to, co položíme jako bod nebo dále nedělitelné; ale všechno názorné můžeme pojmout také jako mnohé
§31
b) opsatelná empirickou charakteristikou (kompaktnost, ohraničenost)
i) i zvířata by o něm měli mít představu; pes si je vědom podobnosti v následování JEDNÉ kočky a pokousání od JEDNOHO velkého psa
ii) §32 Země má jeden měsíc = měsíc je kompaktní, ohraničený
pak má Jupiter také JEDEN měsíc (ve vztahu k nedělitelnosti)
§32
iii) dokonce nedělitelnost – tím získána nezávislost na subjektivním pojetí (počet nezávisí na mém pojetí, ale na pevnosti tělesa) - není toho moc k počítání

B) Jsou jednotky stejné?

[problém daný definicí čísla abstrakcí, úzce spjatou s agregativním pojetím, ta jsou dvě

1) číslo samotná skupina předmětů
Weierstrass: číslo je posloupnost stejnorodých věcí

„*Nejnaivnější názor je ten, podle něhož je číslo něco jako hromada, hejno, v němž jsou věci obsaženy se vším všudy.*“
velmi vágní, a základní problém: odlišné skupiny předmětů reprezentují stejná čísla
[⊗ ⊕ ∅] ≠ [® © ∇]
⇓ ⇓
[O O O] = [O O O]
Husserl, Schröder: "abstrahujeme od specifických vlastností individuí", "odhlédneme od znaků, kterými jsou věci odlišeny"
Frege komentuje: *Při něm bývá pocítěna potřeba tyto předměty očistit od jejich odlišností. Námi uvažovaný pokus patří k těm, jež toto očištění provádějí v psychologickém prádelním kotli. Ten má tu výhodu, že v něm věci získají zvláštní přizpůsobivost, díky níž již do sebe v prostoru tak prudce nenarážejí a jsou zbaveny mnoha nepříjemných rozdílů a zvláštností. K tomuto účelu poskytne dobrý louh nyní tolik oblíbená směs psychologie a logiky.*« [RPA, 315sq]

speciální případ abstraktivní teorie
Cantor, Husserl: jedničkové pojetí čísla
„*Jelikož se z každého prvku* m*, odhlédneme-li od jeho povahy, stává "jedna"* [*Eins*]*, je kardinální číslo množiny* M *samo určitou množinou skládající se ze samých jedna, množinou existující jakožto intelektuální obraz či projekce dané množiny* M *v našem duchu.*“ [GAC, 283]
⇓ ⇓
[1 1 1] = [1 1 1]
problém: zbavíme-li předměty odlišností, nesplynou?: jinak řečeno: jsou jednotky stejné nebo odlišné

případ velkého Fregova tématu: **kritika zvůle psychologické abstrakce**
]
Thomae: vyjdeme z konkrétní mnohosti [⊗ ⊕ ∅], odhlédneme od specifik individuí
Lipschitz: tím nezískáme počet věcí, ale obecný pojem, pod nějž spadají (kočka)
kočky ovšem zůstávají tak odlišné, jak byly, stejné jsou jen s ohledem na pojem

[nutno rozlišit:

1) **abstraktivní definici pojmu**
2) **abstraktivní definici čísla**

(1) Frege ještě dílem připouští, i když neochotně; jinak je pro něj prototypem zavlečení psychologických úvah do logiky

pojem = představa

pojem ale objektivní entita [význam pojmového slova, viz dříve a dále]

pojem je charakterizován geneticky, tj. má být s ohledem na svoji abstraktní povahu výsledkem mentálního procesu, při němž »koncentrujeme naši pozornost na určité znaky *myšlené* věci*, jinými slovy na nějaké části naší představy této věci, přeneseme je do pole naší pozornosti a s menší či větší dokonalostí je izolujeme tak,* že od ostatních znaků odhlédneme *neboli "abstrahujeme", tzn. odsuneme ve vědomí do pozadí ty části představ, které jim přísluší, případně je necháme zcela zmizet*«
Frege komentuje:
"*Všímáme si méně jedné představy, a ona mizí. Tím, že takto necháme mizet jednu vlastnost* [*Merkmal*] *po druhé, získáváme stále abstraktnější pojmy.* [*Také*] *pojmy jsou*

tedy představy, jenom méně úplné nežli předměty; mají však vlastnosti těch, z nichž jsou abstrahovány. Nepozornost je tedy výsostně účinná logická síla; odtud asi také pochází roztržitost učenců.« [RPA, 316]

abstrakce, reflexe, definice: (Brahma, Višnu, Šiva) *V držení těchto kouzelných sil není člověk příliš dalek všemohoucnosti. Význam této možnosti lze sotva změřit. Pomysleme např. na její hodnotu pedagogickou: učitel má dobromyslného, ale líného a hloupého žáka. Abstrahuje tedy od jeho lenosti a hlouposti, přičemž stále reflektuje na jeho dobromyslnost. Následně mu definicí udělí vlastnosti píle a chytrosti. Prozatím se ovšem člověk omezil jen na matematiku.*"

(2) problém výše popsané psychologické definice čísla odmýšlením rozdělujících vlastností je, že výsledné předměty jsou nerozlišitelné, a tedy splývají
]
§35 číslo je jen jiný název pro rozdílnost (Jevons)
Schröder: počitatelné věci musí být rozlišitelné

§36
dilema [§39]
  a) **počítané předměty musí být stejné (jednotky vůči výslednému číslu)**
  b) **rozdílné (jinak splynou v jedno)**

[další výklad
autoři předpokládající a) se snaží překonat b)]
  1) Jevons: 5 = 1+1+1+1+1 = 1‘+1‘‘+1‘‘‘+1‘‘‘‘+1‘‘‘‘‘
  2) různá místa odlišujíc 1, pak ale 1 = 1 neplatí
rovnou psát a+b+c+d+e

§37 jak užíváno: Einheit (jednotka, jednota) vs die Eins (jednička)
Locke		Einheit=Eins
Leibniz		Eins concretum, Einheit abstractum

§38 [předznamenání sémantické – ontologické – normace; východisko ze zmatku]
***die* Eins**		určitý člen, neschopno plurálu, 1, jméno předmětu (jako Friedrich Veliký, Kryštof Kolumbus [Kolumbové = pojem, odvážní muži objevující Ameriku])

(absurdní konsekvence Jevonsovy indexace
1‘ je nesmysl,		3-2=1
			(1‘+1‘‘+1‘‘‘)-(1‘‘+1‘‘‘)=1‘
co ale			1‘+1‘‘+1‘‘‘)-(1‘‘‘‘+1‘‘‘‘‘) ?
pouze jedna jednička; 1 neoznačuje víceznačně, to co je čítáno
	rovnice má tři kořeny,		2, 5, 4
					1‘+1‘‘+1‘‘‘=3)

Einheit		pojmové slovo
neučitý člen, plurál

„a“ (plus) nemá agregativní charakter
chápáno jako „Praha a Paříž“ pak 1+1+1 není tři ale 1, jako zlato a zlato je zlato
§39 opakování dilematu

C) Pokusy o řešení

komentáře nevěrohodných pokusů
§40

a) vlastnost prostoru a času, body stejné, odlišují se pozicí, jakožto součástí gesammtanschauung – jednota rozlišnosti a stejnosti

Hobbes – rovnost jednotek vzniká dělením kontinua (scholastici)

Thomae – po abstrakci od vlastností zůstávají čítané předměty odlišné různou polohou v prostoru a následností v čase

proti: omezení čítaného na empirické, Jevons: 3 mince zůstávají 3 mince bez ohledu zda je počítáme v tom či onom pořadí

§41 b) abstrakce od všeho kromě polohy a času
§42 c) obecný pojem řady [priorita kardinálního čísla před ordinálním, kolik před kolikátý]
§43 d) číslo jako součet číslovek 1 (Schröder), vypadla 0
§44 e) číslo je prázdná forma rozdílnosti (Jevons) – abstrahuji, ale myslím je jako různé jak na velká čísla, vypadla 0

D) Řešení

přehled vyřešeného a problémů
1) číslo není empirická vlastnost
a) o čem je ale vypovídáno?
2) není fyzikální, subjektivní
3) není to agregát, termíny „množina“ se k jeho vysvětlení nehodí
b) dilema Eins vs Einheit, jedno jako mnohé
4) „jedno“ nelze definovat jako nerozloženost (itelnost)
c) počítané věci – jednotky, stejné a různé zároveň
5) jednotka je pojmové slovo, jednička předmět
6) plus není znak pro hromadění

§46
výzva k jazykové analýze:
„*Abychom do věci vnesli jasno, bude dobré uvážit číslo v kontextu věty, kde je jeho původní způsob užití zvláště patrný. Jestliže po spatření týchž vnějších jevů mohu stejným právem říci "toto je skupina stromů" a "toto je pět stromů" či "zde jsou čtyři kompanie" a "zde je pět set mužů", nedochází při tom ani ke změně jednotlivého, ani ke změně celku, nýbrž mění se jen moje pojmenování. To je ale znak toho, že došlo k nahrazení jednoho pojmu pojmem jiným. Tím je nám dána na srozuměnou odpověď na první otázku předchozího paragrafu, totiž že udání čísla obsahuje výpověď o pojmu.*“ [GL, § 46] (o čem je číslo vypovídáno, čemu je připisováno)

Exkurz – základní pojmy fregovské ontologie

dosavadní nejpřirozenější řešení: číslo je vlastností agregátu
problém jak chápat agregát

a) prostý fyzikální celek; s transparentními vlastnostmi, které zřejmé již při jeho empirickém předvedení, ukázáním
   neurčitost
   otázka kolik vyvolává kolik *čeho*; požadavek pojmového členění

b) pojmově strukturovaný celek; pojmově znamená jazykem – kritérium objektivního

to je blízko Fregově řešení – přímo pojmu, i zde lze uvést námitky, tj. nepříslušnost k agregátu lze opět hájit
„*Nejzřetelněji je to snad vidět na čísle 0. Řeknu-li: "Venuše má 0 měsíců", pak zde není žádný měsíc či agregát, o němž může být činěna nějaká výpověď; ale pojmu "Venušin měsíc" je tím přiřazena vlastnost, totiž ta, nic pod sebou nezahrnovat. Řeknu-li: "císařův kočár je tažen čtyřmi koni", přikládám tak číslo čtyři pojmu "kůň, který táhne císařův kočár"*." [GL, § 46]
totéž pro číslo 1

Fregova koncepce pojmu,
nutné, rekonstruovat úzus termínů:

předmět	pojem	funkce	agregát	rozsah pojmu

A) pojem vs předmět, **(Begriff und Gegenstand)**
jakožto základní stavební kámen fregovské ontologie

dialektika distinkce

	předmět	pojem
	singulární	obecná představa (representatio communis)

a) pojem vzniká abstrakcí z předmětu – koncentrujeme pozornost na určité znaky a od jiných odhlédneme
b) logicky se od sebe obě typy reprezentací neliší, kontingentní rozdíl četnosti:

	singularita	pluralita
	conceptus sing.	conceptus communis

Kant je filosof = každý Kant je filosof

Frege
a) začíná větou, resp. významovým korelát celé věty, **souditelný obsah**, obsah možného soudu, to co lze větou vůči někomu tvrdit; věta je sémantický prim; nejmenší samostatná jednotka jazyka
b) kategorizace nevětných výrazů, rozpad věty na

	vlastní jméno	pojmové slovo
nesouditelné obsahy		
	předmět	pojem

c) tradičně (fregovská tradice) rozdíl na úrovni výrazů byl vysvětlen rozdílem na úrovni ontologické: vlastní jméno je ten výraz, který označuje předmět
co je ale pojmové slovo – cosi co neoznačuje nic **samostatného**, samostatně existujícího, ale představu, cosi mentálního

	samostatný	nesamostatný

psychologické kořeny
proti tomu Frege postuluje jeho objektivitu pojmu, **pojmový realismus**; analogickou empirickému předmětu (interpretovatelné jako platonismus),
nesamostatnost drží jako ontologickou charakteristiku (objektivní bytí odlišného typu)

	samostatná entita	nenasycená, doplnění vyžadující – aby mohl být větou resp. jejím obsahem, jakožto něčím primárně samostatným

e) na ontologické úrovni ovšem nemá racionale – předmět potřebuje doplnit do větu stejně jako pojem; jedná se o charakterizaci různého užití výrazů, nikoli ontologickou

f) N $F(\zeta)$
substituovatelný, vyjmutelný, substituted for — nesoucí s sebou místo pro doplnění, substituční rámec, substitutional frame

	N	$F(\zeta)$
f)	substituovatelný,	nesoucí s sebou místo pro doplnění
	vyjmutelný	substituční rámec
	substituted for	substitutional frame

g) větu lze rozložit i jinak,

$\Omega(N)$	F
vlastnost N	konkrétní vlastnost
pojem 2. řádu	pojem

N ovšem má rysy samostatnosti, nevyžaduje udání adicity, kam doplnit
ζ je otec, ζ je otec θ, ζ běží, ζ běží do θ, ζ běží z κ do θ ...
h) hlásáme-li kategorizaci nevětných výrazů na neontologické bázi; zapotřebí udat analytická, vnitrojazyková kritéria, kdy považovat výraz za jméno, zbytek = substituční rámec;
kritérium identity = substituovatelnost = samostatnost (viz dále)

B) pojem jako funkce (Funktion und Begriff)
zatímco pojem vs předmět filosofičtější (obecně ontologický) podklad

další nabízený opis techničtější:
na cestě k formální sémantice (jako byla diagramová pro sylogistiku)
opisná kategorizace významu – báze konstrukce formální sémantiky
rozdělenou větu F(N) chápeme jako výraz **funkcionální aplikace**
předmět funkce=pojem

genetické zdůvodnění analogie:
N nemusíme substituovat jen ve větách, ale i ve jmenných (dále substituovatelných) výrazech (substituted in)
hlavní město (Německa)
nahrazením státu (jménem jisté entity) získáme jméno jiné entity; podobnost
sin 0
odtud sémantické využití matematického pojmu funkce, jediný požadavek N=M, pak F(N)=F(M) 6=3+3
analogie na věty (Descartes) je filosof
co se nezmění, zaměníme-li jméno téhož člověka (Kartézius)
WW
odtud a) T, F jsou předměty
b) věta je jménem WW
c) pojem je funkce z univerza do pravdivostních hodnot
ontologie univerzum: předměty, W, F,
mezi nimi přiřazení, ta ovšem nejsou předměty univerza

C) pojem jako agregát
moderní sémantika
logická interpretace jazyka sestávajícího z konstant, predikátových (n-místných) výrazů sestává z nosiče (univerza),

jméno	predikát
předmět	množina

splňování F(N) je pravdivá iff předmět přiřazený N náleží množině přiřazené $F(\zeta)$
důvod: **WW nejsou předměty univerza**, technický detail; lze přecházet
předmět charakteristická fce množiny

SHRNUTÍ ZE 24. 3. 2003

F(N) je pravdivá iff char. fce F přiřazuje předmětu N W

pojem = agregát
odpovídá tradiční *obecné* představě (označující více prvků)
a) pod pojem může spadat jen jeden předmět, přesto není s tímto předmětem totožný; jsou to entity jiné kategorie; můžeme říci nasycené a nenasycené, čímž jen odkazujeme k odlišným užitím odpovídajících výrazů

Měsíc	ζ je satelit Země (Jupitera)
předmět	jeho vlastnost
předmět predikace	to, co je predikováno
co nemůže být predikováno	

b) rozdíl jednoprvkové a jejího prvku

Měsíc	{Měsíc}

není výsledkem agregativní koncepce pojmu, vycházející ze shromažďování předmětů, jimiž jedinými je souhrn určen

jednoprvková ani prázdná množina souhrny netvoří

jedná se o koreláty opačného postupu, zakládající množinu v jazyce, via výrokovou funkci

od pojmu Fx k souhrnu předmětů, které pod něj spadají x;Fx

D) rozsah pojmu vs agregát

rozsah pojmu	agregát
x;Fx	{a, b, c}
určen jazykovými kritérii	určen prvky
	v reálu závislý na prostor. blízkosti

E) **pojem a jeho rozsah**
východiskem odlišná, nepředmětná povaha funkce (pojmu)
a) pojem sám *předmětem* úvahy; $\forall$x 2x=x+x; tvrzení rovností dvou funkcí
b) nikoli, x+x není jméno předmětu, je tvrzena pouze rovnost hodnot funkce
c) rovnost jejího grafu (průběh hodnot); rozsahu pojmu nový předmět
x;2x=y;y+y

pojem	rozsah pojmu	agregát
funkce	předmět	předmět
Fx nenasycený	jméno předmětu, substituovatelné na místo jiných	
	F(N), F(x;Fx) syntakticky správné	
	F(F) nikoli; do F(ζ) za ζ pouze výraz, který ji nasytí (F ovšem má stále volné místo F(Fζ)	

d) i funkce může být předmětem úvahy, tj. může mu bát něco predikováno, ale předmětem jiného typu, s vlastností jiného typu (viz výše)
e) pro znalce: Frege neztotožňuje funkci s jejím grafem, jeho pojetí je ovšem extenzionální, tj. x+x je táž funkce, jako jakákoli, co má stejný graf
intenzionální pojetí funkce by x+x a 2x odlišilo jakožto případy odlišné konstrukce

všimněme si, jakou roli zde v úvahách o předmětnosti hrají kritéria identity

SHRNUTÍ ZE 31. 3. 2003

Výklad (§45-§56) existence

začínáme oddíl IV (Begriff der Anzahl); z III dokončujeme obhajobu: „číslo přísluší pojmu“

minule:

pojem jako prvek fregovské ontologie	vs předmět
nenasycený	nasycený, samostatný
význam substitučního rámce	význam substituovatelného výrazu
funkce	hodnota
vede od někud někam	stojí na vlastních nohou
místo pro doplnění	

$$F(N)$$

$F(\zeta)$	N

Russell: W: být predikátem který není predikován sám sobě

$W(W) = W(\neg W)$ a vice versa

$W(W)$ není dobře utvořený výraz, $W(\zeta)$ není substituovatelný term, nemůže nasytit, protože sám nenasycený

Frega se ovšem paradox týká

tradiční terminologie

pojem	rozsah pojmu	(Umfang)	agregát
Fx	$x;Fx$		
	třída předmětů pod p. spadajících; nikoli		
	určená jazykovými kritérii		výčtem prvků

[problém nekonečných souborů, nezadatelné výčtem]

funkce	předmět

$F(x;Fx)$ správně utvořený výrazy

odtud Russellův paradox

definujeme

$N \in x;Fx$ iff $F(N)$

$\neg.y \in y$ je správně utvořený výraz, pojem rozsah $\{y;\neg.y \in y\}$

$?\{y;\neg.y \in y\} \in \{y;\neg.y \in y\}$

[poznámka: přechod od pojmu k rozsahu komplikovanější

pojem je jenom případem funkce, nutné rozsah zobecnit i pro obecné (aritmetické)

funkce	průběh hodnot funkce (Wertverlauf), graf funkce	
Fx	$x;Fx$	
	lepší představit si jako systém uspořádaných dvojic	
	x je generál	<Pinochet, 1>
		<Kadáfí, 0>
		<Mušaraf, 1>

v souladu s rozlišením predikátových výrazů a funktorů, rozlišujeme abstrakci

tříd	z výrokových forem	$\{x;Fx\}$
funkcí (lambda)	z termů	λxFx]

Komentář (§46-§53)

Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe
problémy, potvrzení a dovysvětlení
§46
a) z prázdných pojmů lze dospět k 0, totéž není možné u agregátů (prázdnou třídu nikdo nikde neviděl, je to odvozený pojem)
b) pojem „příslušník německé říše“ v čísle kolísá
ale: pojem je taková významová část věty, která vede od předmětu k WW
což u vět jako
U příslušníků německé říše je 10000
V včera pršelo, mám hlad
neplatí, protože nemají definitivní WW rep. mění ji v závislosti na čase a místě pronesení
tato specifikace musí být součástí pojmu, „příslušník německé říše v čase t“

[s tím souvisí: ostrost pojmu a vyloučený třetí
kritérium smysly Fregovy logiky: každá věta T nebo F nic třetího
speciálně: věta formy F(N) vždy T nebo F
pojem F definován pro každý objekt N
problém
a) přirozené pojmy neostré; dobře: je chápáno jako normativ, sporné případy ošetřeny; kiwi je chlupaté, ježek není chlupatý atd.
b) Frege vyžaduje definovanost napříč kategoriemi, pro celé univerzum diskurzu, tj. z jakéhokoli možného

pojem F musí být definován pro jakýkoli objekt i mimo přirozenou aplikaci
Měsíc < 3, alef$_0$ je chlupaté; musí být ohodnoceno, konvence: F
obecně: totální definovanost funkcí
problém, pojmu
Měsíc+Měsíc=x, pro libovolný objekt F, + pak není totální]
§47
c) pojem není nic subjektivního
d) každá velryba je savec
pojednává o pojmech = má jinou strukturu než věta
Willy je savec
která pojednává o předmětu;
je jí řečeno něco objektivního, ergo pojem není subjektivní
§48
e) číslo možná často vzniká abstrakcí z věcí, ale via pojem, který je abstrahován první
[ještě držena abstraktivní produkce pojmu]
pojem nebezpečí požáru získáme tak, že postavíme dům ze dřeva a se slaměnou střechou, jehož komíny netěsní
f) sjednocující vlastnost pojmu vs omezená jednota syntetické apercepce (v jednom vědomí); číslo neomezeno na prostor a čas
§49
g) Spinoza: chceme-li něco počítat, musíme to převést na stejnou míru
Sesterz a Imperial v dlani jsou dvě mince
§50, §51
Schröder
vysvětlení rozdílu předmětu a pojmu, nespočívá v počtu předmětů pod pojem spadajících, ale v *neurčitém členu* (nějaký pes, ten Kant)

§52 německý úzus 10 marka – o pojmu, nelze přeložit a tedy ani použít
§53

Exkurz na téma existence

vysvětlení co z logického hlediska znamená, že je číslo výpovědí o pojmu
znak pojmu vs. vlastnost, existence

pojem definován jako nenasyceného, co musí být o něčem predikováno, aby vznikla věta jak rozumět, že je o něm predikováno číslo, zvláště když máme podezření, že číslo je předmět (inverzně jak by mělo být)

viděli jsme	že F(N) rozložitelné	
	N	$F(\zeta)$
	předmět	pojem
	F	$\psi(N)$
	pojem (vlastnost)	vlastnost vlastnosti

i pojem může mít vlastnosti, může pod něco spadat
ale to je entita odlišného charakteru pojem 2. řádu
jiný typ nasycenosti: nenasycenými entitami 1. řádu, volba ψ
výzva ke konstrukci **hierarchie funkcí** – teorie typů pro funkce

rekonstrukce terminologie

a) předmět spadá *pod* pojem 1. řádu (Ordnung, později Stufe)
b) pojem 1. řádu spadá *do* pojmu 2. řádu

kategorizace výrazů, kategorie

základní	T, S	
odvozené v souladu se substituční strategií (nenasycené)		
odvozené	$X_1, ...X_n \rightarrow Y$	vznikne z výrazu kategorie Y vyjmutím $X_1, .X_n$
predikát	$T \rightarrow S$	
predikát 2. řádu	$(T \rightarrow S) \rightarrow S$	

jak rozumět výrokům o číslech osvětleno na tvrzení existence

v *Nachlassu* vznesena otázka: o čem je tvrzení existence
„*Uvažme věty "Tento stůl existuje" a "Existují stoly". Otázka nyní zní, zda lze se slovem "existuje" ve větě první spojovat tentýž obsah jako se slovem "existují" ve větě druhé.*" [DE_N, 68]
logický rozdíl

(1) tento stůl existuje (2) stoly existují

(1) nedává dobrý smysl - kdyby ano, pak i negace, (důsledek výstavby věty: A smysl, $\neg$A též), ale: tento předmět neexistuje – a který myslíte?
[nenechat se splést do empirických úvah s určitými deskripcemi – Russell, jméno má garantovaný denotát, což u většiny empirických jmen nefunguje (Mojžíš, Pythagoras), ergo – jsou to určité deskripce, „ten jediný x, který"; přes něco to x ale probíhá, a je pitomost omezit se pouze na osoby v místnosti, a ostatní konstruovat z toho co máme momentálně k dispozici]
vlastnost sémantiky

věta užívající jméno již předpokládá existenci předmětu proto, aby mohla být vůbec pravdivá (existenční presupozice – věta, která musí být pravdivá, aby jiná věta byla pravdivá či nepravdivá) [kompozicionalita významu: význam složeného výrazu je určen významy jeho částí]
tedy: pokud existence vlastnost 1. řádu, pak triviální – patří všem předmětům, (1) je tautologie

(2) tvrzení ani nesmyslné, ani triviální: existence ovšem není vlastností předmětu(ům), (stolům), ale pojmu jakožto tvrzení jeho neprázdnosti;
proto má smysl říkat: stoly neexistují, na existenci prázdného pojmu nic není
tvrzení neprázdnosti je význam existenčního kvantifikátoru (výraz kategorie $(T\rightarrow S)\rightarrow S)$)

rozdíl mezi (1) a (2)
Carnap, existence

interní	prvočísla existují	vymezení v rámci exist. oboru, otázka neprázdnosti extenze jistého vymezení
externí	čísla existují	vztahující se k celému oboru
či jej konst. části	5 existuje	triviální či metafyzické]

vlastnost pojmu není znak pojmu
znak = vlastnost 1. řádu, předmětů spadajících
pravoúhlý, *rovnostranný* trojúhelník — *prázdný* pojem

chyba v důkazu Boží existence; dokonalé bytí, musí mít i existenci jako jeden ze znaků
Kant: existence není vlastnost předmětů; totéž pro jedinečnost Boží

Fregův sofistikovaný aparát: je, ale nikoli prvořádová; náleží pojmům

existence	popření neprázdnosti	$\exists xFx$
vyjadřuje se k počtu předmětů		alespoň jeden
alespoň dva		$\exists x,yFx, Fy\wedge\neg x=y$
nejvýše jeden		$\forall xy(FxFy\rightarrow x=y)$

zobecněné kvantifikátory, predikáty pojmů, tvar MxFx
$\exists_{\leq 1}$, $\exists_{1\leq}=\exists$
lze vyjádřit i přesné počty

popření prázdnosti	$\neg\exists xFx$	přípis 0
jedinečnost	$\exists xFx\ .\wedge\ \forall x\forall y(Fx \wedge Fy \rightarrow x = y)$	přípis 1

atd
numericky definitivních kvantifikátorů, jimiž je vyjadřován počet

$$\exists_0 x.Fx \approx \neg.\exists xF(x)$$
$$\exists_1 x.Fx \approx \exists xFx\ .\wedge\ \forall x\forall y(Fx \wedge Fy\ .\rightarrow x = y),$$
$$\exists_{i+1} x.Fx \approx \exists x(Fx \wedge \exists_i y(Fy \wedge x \neq y)).$$

Komentář (§54)

§54 vyřešení problému s jednotkou a jedničkou, stejností a růzností počítaného

pojem jemuž připisováno číslo, musí to, co pod něj spadá, jistým způsobem ohraničovat, totiž tak, že jejich části již nejsou jeho části

„slabiky slova pět" ohraničuje slovo „pět" a „p" již pod něj nespadá

to neplatí o všech predikátech, např „červené"
číslo aplikovatelné pouze na sortální predikáty, s diskrétní extenzí, jejichž charakteristikou je

a) kritérium identity
b) počitatelnost

toto červené červené co?, vyžaduje sortál (šál), s KI spjatý
odlišit: toto je stejný odstín červené – zde kritéria definována přes vzorkovník

počítáme-li předměty, pak via pojem; ten ve vztahu k připisovanému číslu představuje jednotu, vůči níž se pod něj jsou spadající předměty chápány jako reprezentanti téhož (jejich stejnost),
samy jsou ovšem různé

Komentář (§55)

začátek oddílu IV
§55 rekurzivní definice fráze (1) „pojmu F přísluší číslo 1"
(n+1) když „pojmu F přísluší číslo n" pak „pojmu F přísluší číslo n+1"
§56 nedostatečnost definice
obecně není definováno „pojmu F přísluší číslo n";
neboť neznámo i „pojmu F přísluší číslo n-1"
tj. definice nemá formu

pojmu F přísluší n iff P(n)

srv n je sudé číslo iff $\exists x 2x=n$ 2 je sudé
je-li n sudé, pak n+2 také

definována pouze posloupnost

„pojmu F přísluší číslo 1"
„pojmu F přísluší číslo 1+1"
„pojmu F přísluší číslo 1+1+1"

(n+1) je pouze schéma, sugerující nám, že lze na místě n či n+1 substituovat, a tedy i kvantifikovat[3]
že nemožné lze vidět na $\exists_n x.Fx$ pouze součást notace, metajazyka

z této nedostačnosti dle Frega vyplývá, že nelze dokázat či vyvrátit

(Q) $\forall$m, n (pojmu F přísluší n) a (pojmu F přísluší m), pak m=n
(R) pojmu F přísluší číslo (Julius Cesar)

což při přepisu odpovídá

$\exists_n x.Fx \wedge \exists_m x.Fx \rightarrow m=n$
$\exists_n x.Fx \wedge n=$Julius Caesar

problém spíš proč by to dokazatelné být mělo

---

[3] Možná je chyba, že to takto definujeme, to lze ale odstranit tak, že definujeme třetiřádovou funkci následníka libovolného (tzv. zobecněného) kvantifikátoru, viz Dummett, tedy
$S(MxFx)=\exists x(Fx \wedge My(Fy \wedge \neg x=y))$,
a zvláště definujeme třetiřádovou vlastnost: být definitiním kvantifikátorem. Viz dále

nutný exkurz
Frege od II. rozlišuje dvě typická užití číslovky
1) adjektivní trpaslíků je 7 = pojmu trpaslík přísluší číslo 7
2) substantivní $\log_2 8$ je 3

logická analýza by měla zvládnout obě zároveň – na louce je 6 krav, 5 ovcí a žádná jiná zvířata, 6+5=11, ergo na louce je 11 zvířat

lze zaujmout dvě strategie, od (1) k (2) – adjektivní, a vice versa substantivní
Frege zkouší první, a tvrdí, že selhává, neboť

(S) definována pouze fráze „přísluší číslo 0“ (etc), z níž nelze vyjmout 0 jako samostatnou entitu, výrazu „číslo m“ nebyl dán smysl

(T) 0, 1 fungují jako vlastní jména, připouští určitý člen

odtud také námitky (a), (b)
[viz dále: jsou-li číslovky jména, -lze je substituovat, nahrazovat jinými jmény, tedy i Juliem Caesarem,

- mohou se vyskytovat po stranách rovnosti, které musí být jednoznačně ohodnoceny i pro ostatní jména oboru – důsledek souhrnného univerza]

pád adjektivní strategie ale Frege nezdůvodnil; to že není 0, 1+1 definována mimo kontext nám nemusí vůbec vadit, jsme-li zastánci

a) **radikální verze adj. strategie**, vykazující, že i substantivní užití má skrytě adjektivní strukturu – výrazy jako „(to) číslo m“ jsou
   a. neúplnými symboly, ne substituovatelnými výrazy (indexy kvantifikátoru),
   b. pevnou částí fráze „přísluší číslo n“, z níž je nelze vyjmout zrovna tak jako „cow“ ve slově „coward“; navíc
b) není pravda že by v ní (Q) nešlo dokázat, jen je zapotřebí třetiřádový aparát
   „rovnost“ jen pro předměty
   N=M iff LP $\forall F(F(N)\leftrightarrow G(N))$; odvozené
   pojem $F\zeta$= pojem $G\zeta$ iff $\forall x(Fx\leftrightarrow Gx)$
   p2 $Mx\Omega x$=p 2 $Gx\Omega x$ iff $\forall F(MxFx\leftrightarrow GxFx)$
   $NxFx\wedge MxFx\rightarrow\forall G(NxGx\leftrightarrow MxGx)$
   nevztahuje se jen na numericky definitivní; existuje alespoň 9 planet, méně než 100 planet,
   definice definitivnosti
   $MxFx\rightarrow$(existuje bijekce mezi Fx a $Gx\leftrightarrow MxGx$)

   navíc
c) dosud se zdálo, že číslo funguje jako vlastnost, něco co je připisováno pojmu, a prosté tvrzení předmětnosti by mělo být lépe zdůvodněno

k tomu Frege in §57

ve větě „pojmu F přísluší číslo 0“ je „0“ jen část, nikoli celý predikát
proto nenazývám 0, 1, 2 vlastností pojmu [nakonec ale bude číslo rozsahem vlastností všech rovnopočetných pojmů]

adjektivní strategie opuštěna, nastupuje substantivní strategie, i když není ukázáno, že to je jediná cesta
Frege §58 a dále sugeruje, že číslovky užívány jako vlastní jména

vysvětlení atributivního užití via substantivní
„Jupiter má 4 měsíce“, „Jupiterovy měsíce *jsou* 4“ → „počet JM *je* 4“
různé užití kopuly

predikace (pojmu) rovnost
převod standardizované verze
pojmu JM přísluší číslo 4 číslo příslušející pojmu JM = 4

Výklad (§57-65) - deskripce, identita

dosavadní postup zkoumání, začali jsme IV díl (§55 dále) – konstruktivní část spisu
konec III. oddílu konstruktivní závěr destruktivní části
číslo není vlastností empirických předmětů, není nic mentálního, není to skupina předmětů, nenáleží agregátu

číslo přísluší pojmu

jak syntakticko-sémanticky rozumět

analogie s existencí: vlastnost 2. řádu

EXISTENCE (téma samo pro sobě)

Petr existuje		lidé existují
nesmysl	tautologie	třída lidí je neprázdná
tento stál neexistuje	∃xx=Petr (lepší pro čísla)	∃x(lidé x)
	pí je transc. číslo→∃x(x transcendentální)	

problém s netrivialitou empirické existence

Paegas neexistuje   není kontradikce

Paegas není jméno, ale určitá deskripce „ten jediný okřídlený kůň Bellerofontův;
tedy predikát spoluzahrnující tvrzení jedinečnosti
∃x(x=N) lze chápat jako ∃x(x být N), kde být N je predikát (pegasovat)
problém, že implicitně předpokládáme spadání jednoho předmětu (sémantika rovnosti), nyní je nutné explicitně rozepsat
Pegas existuje: ∃x(x je OKB & ∀y(y je OKB→ y=x))

z logického hlediska je problém smysluplnosti empirické existence irelevantní,
problém s výrazy typu „ten jediný P“, které mají „referential purport“, ale často v něm selhávají, tedy že **nedenotují či víceznačně denotující,** spočívá v porušení WP

největší prvočíslo má vlastnost P, ¬P
prvočíslo menší než 10 je větší než 5, je menší než 5

DESKRIPCE zmíněna i v Gl, i když okrajově
[§74
1) Frege: výrazy které si hrají na jména - „to jediné vlastnosti P“ (ixPx) – i když jimi vždy sémanticky nejsou, jsou definicemi předmětu z pojmu, u nějž je třeba prokázat

∃xPx
∀x,yPx, Py→x=y

pak lze ixPx užívat jako substituovatelný term; neboť pro výrazy

F(ixPx) platí WP

uměle jim lze také zajistit denotát (dělení 0, každý term význam)

¬∃xPx	prázdná třída
∃x,yPx,y&¬x=y	{x,Px}

2) Russell, analyzovat deskripce tak, aby věta která je obsahuje měla WP nezávisle na tom, zda něco takového existuje či ne:
již zmíněný přepis explicitně zahrnující jedinečnost a existenci
„(francouzský král) je holohlavý“   H(ixFKx)

∃x(x je FK, ∀y y FK→x=y, Hx)   F

za cenu, že se ixPx (singulární termín- francouzský král) z analýzy zcela vytratí, není nikdy substituovatelný výraz (neúplný symbol), není složkou věty, ale rozplyne se v její analýze

„(francouzský král) není holohlavý“ $\neg H(ixFKx)$

$\exists x$(x je FK, $\forall y$ y FK$\rightarrow$x=y, $\neg$Hx) F

ale to nejsou skutečné negace toto je špatný zápis

negovaná věta se k ixFKx nechová jako ke jménu předmětu ani když existuje, tj. neupírá mu nějakou vlastnost, ale tvrdí disjunkci, totiž že buď neexistuje, nebo není jeden, nebo nemá vlastnost

viz má kniha]

návrat k minulému výkladu

analogie přípisu existence a přípisu čísla

pomocí kvantifikace se lze vyjadřovat k počtu předmětů spadajících pod pojem

zobecněné kvantifikátory $\exists_{n<}$=alespoň n, $\exists_{<n}$=nejvýše n

numericky definitní kvantifikátory

podkladem pro

adjektivní strategie od JM je 4, přísluší číslo 4

k $\log_2 8=3$

Fregem odvržena

číslovka pevnou součástí fráze „přísluší n“ ($\exists_n$), nelze ji substituovat, a tedy ani přes ni kvantifikovat jak by se pro předmět slušelo

1) $\forall n,m\ \exists_n x.Fx \wedge \exists_m x.Fx \rightarrow m=n$
2) $\exists_n x.Fx \rightarrow n=$Julius Caesar

Frege tedy zastává že

a) číslovka je jménem předmětu
b) adjektivní strategie to není schopna vysvětlit

problém je v (a): je číslo předmět?, nemá skrytě adjektivní strukturu; pak není co vysvětlovat a padá i (b)

Hodes: rovnice jenom pohodlnou zkratky za užití čísla jakožto druhořádové vlastnosti, (1) lze dokázat

$NxFx \wedge MxFx \rightarrow \forall G(NxGx \leftrightarrow MxGx)$ + definice num. definitního kvantif.

$MxFx \rightarrow$Fx a Gx rovnopočetné (viz dále)$\leftrightarrow MxGx$)

ale: i když nezdůvodněno, Fregův obrat opodstatněný, s číslem jako vlastností 2 řádu vzniká typoteoretický problém, i čísla lze počítat

F: x je prvočíslo <10,

je vlastnost čísel, tedy 3. řádu, a spadají pod ní 4 prvočísla

tj F přísluší číslo 4

ale tato 4 není vlastnost 2. nýbrž 4. řádu (dvě čtyřky!)

viz dále]

tedy: nový start má dobré důvody, i když neuvedeny, resp. uvedeny, ale špatně

c) substantivní strategie (§57)

JM je 4 převedeno na počet JM=4

§58 a dále

SHRNUTÍ ZE 7. 4. 2003

podpůrné (negativně) teze pro (a), nikoli (b)

dosud ovšem nezodpovězeno
„co je předmět“ resp. „co je substituovatelný výraz“

otázce možné rozumět
metafyzicky jazykově-kriticky

podle toho kterou část považujeme za triviálně zodpovězenou (a kterou za hodna vysvětlení)

P, vlastní jméno označuje předmět L, předmět je významem subst. výrazu
a zbývá vysvětlit
jaký typ entity je předmět **jaká vnitrojaz. kritéria jej odlišují od ostatních**

otázku, kterou si později budeme klást speciálně pro
číslo číslovky
jakožto druh předmětu jména

filosofická část logická část
Fregův zájem je na straně P, díky tomu obrat k jazyku, nejprve chce ale vyloučit tradiční předsudky v L, aby je převedl na P
proto
filosofický exkurz na téma předmět; zápas s tradiční metafyzikou (§58-61)

1) problém s metaforou samostatnosti:
předmět samostatný, predikát (vlastnost) nesamostatný: přirozeně metafyzické použití – vlastnosti se nacházejí na věcech, nesamostatně;
předmětu je něco s čím spjata nějaká samostatná představa
námitky
a) to neplatí obecně; §59 abstraktům (vzdálenost Země od Slunce) rozumíme aniž bychom si je uměli představit; §60 i konkréta, jako Země, si představujeme jenom přibližně
b) představitelnost či nepředstavitelnost jsou subjektivní charakteristiky

předmět a pojem objektivní (viz (1) a (3) zásada)
složky obsahu, toho co je sdělováno, co musí být přístupno všem, intersubjektivní
subjektivní složka obsahu intersubjektivní složka obsahu
slovo „pes“, „Napoleon“
libovolný chlupáč pojem, předmět jako inters. korelát
poetický opar čemu rozumím, a vím, že se jedná o psa nikoli kočku apod.
pojmové = inferenčně relevantní [jiná kapitola (B), čím se liší reakce papouška na červenou barvu a výkřik „červená“ (zpravodaj červené od člověka – posit v inferenční struktuře]
získatelné rozpadem souditelného obsahu
c) zdánlivá relevance představitelnosti spjata s uvažováním osamocených slov:

holismus (2 zásada): jde-li o obsah slov, musíme mít na mysli vždy celou větu: pouze v ní mají slova význam; vnitřní obrazy nemusí odpovídat logickým částem soudu; stačí, že má smysl věta, tím ho dostanou i její části

zvláště důležité je to v matematice: neempirická, žádná názorná opora, způsob jak dát výrazu referenci jen přes udání platnosti celým větám
d) samostatností čísla nemá být řečeno že něco znamená mimo větu, ale že to není predikát (samostatnost je opisný termín kategorii vlastní jméno, = substituovatelost)
pozn. pod čarou: $df(x)=g(x)dx$

§61
2) nevede předmětnost k platonismus, kde je číslo?
a) otázka má smysl jen u empirických předmětů (pro které je konstitutivní, definující jejich objektivitu, že jsou vykazatelné v prostoru a čase - setkává-li se někdo večer s vlčím démonem, kterého my ostatní nemůžeme vidět, pak se nejedná o empirický předmět, ale halucinaci);
b) stejně nemá smysl připisovat číslům barvu, rozuměj praktický smysl, ne že by žádnou kontingentně neměla, jako já

[mohli bychom počítat jenom na jedné tabuli jednou barvou, pak by byla všechna čísla lokalizována a obarvena; pro vlastní výpočet by to však nečinilo praktický rozdíl, proto od takovýchto predikátů odhlížíme]
c) je vždy důležité rozlišit dva typy soudů (Kant)

věta typu:	čísla jsou nečasová, bezbarvá	meta
je jiného typu než	prvočísla jsou lichá (nejsou sudá)	objektové

v druhé klademe sudost mimo prvočíselnost v rámci stávajícího oboru
v první umisťujeme empirické predikáty mimo obor čísel jakožto obor aplikace; tj. nepřikládáme jim nějakou vlastnost
tzv. **nekonečné soudy**
jsou bytostně metajazykové, interpretovány objektově vedou k metafyzice
čísla a matematické věty jsou věčné apod.

d) §61 ani představy nejsou v nás – kolik mm od sebe jsou vzdáleny; v nás jsou jen krevní tělíska, buňky etc.
]
závěr diskuze

metafyzická obhajoba teze
číslo je předmět (co je předmět?) vede
přes otázku jak je nám dán (obecně předmět zahrnující také číslo) k
a) psychologismu
b) platonismu (čísla ve 3 říši)

přičemž jediná možnost nacházející pro čísla vysvětlení na Zemi, (Sitz im Leben), neextrapolující mimo možnou zkušenost, vede přes jazyk

v této situaci začínáme číst §62 (obrat k jazyku, nejvýznamnější místo *Grundlagen*)

SHRNUTÍ ZE 7. 4. 2003

»*Jak je nám tedy dáno číslo, nemůžeme-li o něm mít žádnou představu ani názor? Slova něco znamenají pouze v kontextu věty. Jde tedy o to vysvětlit smysl věty, v níž se vyskytuje číslovka. Tím je zprvu ponecháno ještě mnoho místa libovůli, ale již jsme konstatovali, že s číslovkami je nutné spojovat samostatné předměty. Tím je nám dán druh vět, které musí mít smysl, vět vyjadřujících znovurozpoznání.*« [GL, § 62]

KX: nemá cenu ptát se co je význam výrazu, aniž bychom věděli jak je užíván ve větách (to platí v obecné rovině předmětů, speciálně pak čísel)

otázky	převedeny
A) co je předmět	co je vlastní jméno
B) co je číslo	co je číslovka

ve smyslu jaká kritéria jej odlišují od ostatních kategorií výrazů
přičemž předpokládáme

C) číslo je předmět	číslovka je vlastní jméno

B je tedy spec.případem A

v citátu je zodpovězeno A:
vlastní jméno je výraz přípustný po straně rovnosti (znovurozpoznání)

dosud:

1) vycházíme z vět jakožto základních **samostatných** jednotek jazyka, tedy něčeho s čím lze učinit tah v jazykové hře (primát věty, samostatnost zde užita ještě v důležitějším smyslu než u předmětu, je to pragmatická charakteristika, primát soudů u Kanta a Wittgensteina)
2) rozlišíme v nich třídu jmen
3) jejich substitucí získáme další kategorie výrazů
4) na tomto rozlišení založíme funkcionální ontologii

pohyb 1 až 4 od věty k tomu, co je
aby skutečná analýza jazyka, zbývá udat vnitrojazykové kritérium pro rozpoznání

5) vlastního jména

vyskytuje se po straně rovnosti
»*Z téhož důvodu zde ještě neříkám "n = m + 1", neboť už skrze symbol rovnosti je (m + 1) označeno jako předmět.*« [GL, § 76]

jméno je to, pro co jsou definována kritéria identity
»*Má-li symbol* a *označovat předmět, musíme mít kritérium* [*Kennzeichen*]*, které by nám dovolilo vždy rozhodnout, zda je* b *totéž co* a*, i když bychom nebyli pokaždé schopni toto kritérium použít.*« [GL, § 62]

racionale spojení identity a jména

1) představme si že jsme objevili horu, stojíme na skále a říkáme: ty jsi A, pak odejdeme a jméno mizí

samotná deixe z ní jméno nedělá, stejně jako nám ho nedodá občanka (vytetováním se problému nezbavíme – někdo musí být znaky schopen přečíst),
to co musíme udělat je zaplést do vztahy s dalšími jmény oboru, uvedeme kritéria, jak ji znovurozpoznat, hora 200 m od jižního pasu, zanesení do referenčního systému
pak principielně ohodnocená tvrzení

a) hora, kterou jsme včera viděli 300 m od severního hřebene = B
b) hora A (dosud ztékaná a pozorovaná ze severu) = B
c) Jitřenka = Večernice = Venuše

složitá praxe znovurozpoznání nikoli dočasná blízkost štítku a exponátu (mýtus muzea) dělá z výrazů jméno
2) neurčitost deixe (triangulace významu)
chci fixovat referenci pro „kniha Vojna mír“ ukázáním, nestačí, Brandom: ještě jiným způsobem
tato kniha je Vojna mír, tato kniha (War and Peace) je ta samá kniha
výraz je jméno nějakého předmětu lze-li jej identifikovat ještě jiným způsobem
3) Frege: výraz nestačí spojit s jedním výrazem téhož ale všemi, které ho označují

to je důsledek již zmíněných základních principů Fregovy logiky

WP	každá přípustná věta 1, 0
ASP	je-li S(N) přípustná věta, pak i věta S(N/M) pro libovolné M z třídy P substituovatelných výrazů

tedy každé 1, 0
vezmeme-li větu N=M jako přípustnou
Wechselwirkung normativu a analýzy přirozeného jazyka (normace nějakého fragmentu praxe)
4) je zřejmé, že udání rovnosti je pro předmět (to o čem mluvíme) konstitutivní!

§62 **k uchopení čísla jako předmětu je třeba fixovat smysl (rozuměj: pravdivostní podmínky) rovnosti mezi číselnými termy (nadpis)**
[§63-§64]

§65 nejprve obecně: pravdivostní podmínky libovolné rovnosti
LP: stejné je to, co lze substituovat salva veritate

> větě A = B se jmény A, B je přiřazena hodnota pravda tehdy a jen tehdy, jestliže pro libovolnou větu ***daného kontextu*** S platí, že v ní lze nahradit jedno z uvedených jmen druhým, aniž by se změnila její pravdivostní hodnota (*salva veritate*)

proč relativizace kontextu
kdyby kontext nebyl, pak by pro žádné graficky různé A, B neplatilo A=B (Petr myslí na jméno A)

obecné důsledky
1) tím jsou spojeny obě charakteristiky vlastního jména

a) substituovatelnost
b) přípustnost identity

»*v obecné substituovatelnosti jsou nyní ve skutečnosti obsaženy všechny zákony rovnosti*«

2) takto lze chápat Quineovu tezi (QT): být znamená být hodnotou vázané proměnné jelikož funkční či větné výrazy nemají zprvu v kontextu rovnítka žádný smysl, nepočítají se ani mezi substituovatelné termy [pokusme se zapsat v Begriffsschrift]
vzpomeňme: $\forall x 2x=x+x$ není rovnost funkcí, ale jejich hodnot!

výrazy pojem F, myšlenka S nejsou jména předmětů

ovšem mohou být, (a) ve specifickém kontextu, se speciálně stanovenými kritérii identity pro jejich jazykové reprezentace
pojem F = pojem G iff $\forall x Fx \leftrightarrow Gx$
$\lambda x fx = \lambda y gy$ iff $\forall x fx = gx$

pak lze zavést proměnnou, ovšem jiného typu (totéž pro rovnost N=M a f=g jiné relace, není inter-substituovatelné)

[jak jinak rozumět QT; představme si konstrukci sémantiky pro logiky 1 a vyšších řádů: výskyt symbolů F, G jak v logice 1. tak vyšších řádů,

$\exists x \forall y (Fx \wedge Rxy)$	$\forall X \exists x \forall y (Fx \wedge Xxy)$
univerzum U pro x	univerzum U pro x a P(U) resp P(UkrátU...) pro X; pokuste se formulovat definici splňování]

SHRNUTÍ ZE 14. 4. 2003

výklad (§63-§69) - abstrakce

minule: §62-63, §65
identita jakožto

a) **syntakticko-analytické** kritérium vlastního jména
výraz je vlastní jméno je-li přípustný po straně rovnosti
b) **sémantická** podmínka udělení reference jmennému výrazu
výraz je jménem předmětu jsou-li s ním spjata kritéria identity (kritéria znovurozpoznání, výraz je jménem předmětu je-li s ním spjat ještě jiný způsob jak ho poznat, Frege – všechny způsoby, od neurčitosti deixe k celoplošnému znovurozpoznání)

proto:

c) větný kontext, v němž substituovatelné výrazy označují předměty (předmětný obor), musí mít rozhodnuty všechny identity; důsledek WP a ASP
d) v tomto smyslu je identita předmětně konstitutivní

IDENTITA
SB, zvláštní relace, dilemma

a) relace mezi předměty – Wittg: říci o dvou předmětech že jsou identické je nesmysl, protože nejsou 2
b) relace mezi jmény – problém use vs. mention, užít výraz není totéž jako mluvit o něm, „Petr“ je menší než „Karel“

puzzle
řešení: u vět (speciálně identit typu Jitřenka=Večernice) a jejich podvýrazů nutno učinit dvě diference

význam	a	smysl
primární role		
to co výraz značí, ven z jazyka		jak to značí
téma obj. jazyka		metajazyka
use		mention
planeta Venuše		nejjasnější hvězda na ranní (noční) obloze

tyto diference umožňují dvě možná čtení vět jako
Večernice = Jitřenka

a) z hlediska **objektového** jazyka je I trivialita (sémanticky předdefinovaná jako relace <a,a>,<b,b> ...), nikoli hluboké metafyzické tvrzení o totožnosti předmětu se sebou samým, nemá cenu ji číst informativně; takto je užívána v pojmovém písmu (A užíván za předmět, nikoli za sebe sama),
Večernice = Jitřenka a Jitřenka = Jitřenka se z tohoto hlediska neliší, nicméně
b) to, proč je zajímavá a informativní je ovšem z hlediska **metajazykového**: tvrzení, že dvě různá jména označují totéž; to se ovšem sémanticky neprojeví (F(N) říká, že předmět N má vlastnost F, A = B ovšem neříká na objektové úrovni, že výraz A označuje tentýž předmět jako B, ale že si jsou si předměty A a B rovny), výrazům nejsou přiřazovány ony samy – kladení různého jako stejné je otázka apriori této sémantiky, její konstituce

právě odtud se bere konstitutivní charakter identity:

dáváme v ní najevo, že různé budeme používat jakožto (výraz) totéž, různé užívat jako stejné (identita je non-distinkce)

deskriptivní preskriptivní moment

zpět k výkladu

v §62 (nadpis) k uchopení čísla je zapotřebí specifikovat číselnou rovnost (její pravdivostní podmínky), a to ve dvou fázích
A) §65 nejprve pravdivostní podmínky libovolné rovnosti, LP
LP: $A=B$ iff $\forall F(F(A)\leftrightarrow F(B))$
spojení kritérií vlastního jména – substituovatelnosti a identity

B) pravdivostní podmínky pro číselnou rovnost (SP)
v souladu z dosavadním výkladem (kde se číslo vyskytuje u pojmu) je třeba rozhodnout
číslo příslušející pojmu F = číslo příslušející pojmu G
kratčeji počet F = počet G

§63 Humův princip (Cantor)
počet F je stejný jako počet G iff lze jejich prvky jednojednoznačně (vzájemně jednoznačně) přiřadit

lžíce na stole	vidličky na stole	sudé č.	liché č.
		2	1
		4	3
		6	5

(není šťastný motivační příklad s ohledem na nekonečnost)

Sněhurčin trpaslík	kurfiřt (volič císaře Říše římské)
Kejchal	falckrabě rýnský
Šmudla	arcibiskup trevírský
..	...

Frege –číslo příslušející pojmu F je totéž jako číslo příslušející pojmu G iff jsou rovnopočetné (gleichzahlig), tj. přísluší-li jim stejné číslo [pozor na formulaci!, nejedná se o tautologii]

počet F = počet G iff F rovnopočetné G
HP N F = N G iff F eq G
existuje jednojednoznačné přiřazení F G
[předběžně: $\exists f\,((fx=fy\rightarrow x=y)\wedge \forall x(Fx\rightarrow Gfx) \wedge \forall y(Gy\rightarrow\exists x(Fx\wedge y=f(x))$,[4]]

3 námitky
1) definujeme rovnost čísel (L), ale význam rovnosti se nevyskytuje jen zde, nýbrž i jinde, a není ho třeba speciálně definovat, stojí předem (LP);
ano, my nechceme dostat, **definovat** rovnost čísel, nýbrž číslo; přičemž víme

[4] kdybychom jako Frege vyžadovali totalitu funkcí, pak nestačí předpokládat ji u f, protože z toho totalita inverze nevyplývá, museli bychom říci, že je na

SHRNUTÍ ZE 14. 4. 2003

A) rovnost konstitutivní element předmětné konstituce, to co musí být specifikováno mezi termy; ***specifikace* rovnosti číselných termů je tedy definicí čísla, totiž jeho definicí v kontextu věty!**, na P jsou SP, kritéria číselné identity
B) při této konstituci hraje velkou roli LP (rovnost kterou známe), který je předpokládán, a v tomto smyslu platí („skrze známý pojem rovnosti chceme získat to, co si je rovno)

definiens HP		**definiendum**
= (LP), rovnopočetnost pojmů	→	číslo příslušející pojmu počet pojmu

tedy

N F = **N G** iff F eq G

obhajoba nezvyklosti takovéto definice

§64 definici směru přímky

LP, rovnoběžnost	→	směr přímky

DEFINICE ABSTRAKCÍ (kontextuální definice)

	výchozí předměty, ekvivalence ≈ na nich	→	nové předměty
	x≈x, x≈y→y≈x; x≈y,y≈z→x≈z		
DA	F ≈ G	↔	#F = #G # je abstraktor

1) směr přímek

přímky, ekvivalence rovnoběžnosti	směry přímek
a//b	a↑=b↑

2) racionální čísla

dvojice přirozených, <m,n>≈<p,q> iff mq=np	m/n=p/q

pohyb od konkrétního k abstraktnímu, konkrétní=relativně konkrétní
4) přirozená čísla

číslovky různých notací, II≈2	2=II

od přirozených k racionálním etc.
číslovka sama ale již abstraktum, typ vs. token

ABSTRAKCE
jak rozumět tomuto vyrábění, abstrahování nových předmětů

jen jistý způsob řeči
spočívající v restrikci kontextu, tj. odhlédnutí od určitých rozlišení, výrokových forem

vysvětlení
jak bylo řečeno, při definici abstrakcí nepředpokládáno jen prosté definiens (F ≈ G, SP), ale i význam identity
LP N=M iff ∀F(F(N)↔F(M))
[Frege §65 jediné co u nových předmětů známe je zaměnitelnost, ostatní musí být zařízeno tak, aby platila – LP není něco co by v DA platilo, ale co má charakter výzvy]

LP je součástí definice abstrakcí, a to součást preskriptivní

A) máme **kontext K** vět v němž **jména T** původních předmětů + **ekvivalence** ≈ na nich
<2,4>≈<1,2>
tyto předměty různé <2,4>¬=<1,2>, ve smyslu, rozlišitelné:
v K pro T neplatí LP, první člen (čitatel) <2,4> je větší než 1
chceme přeměnit ekvivalenci v rovnost
B) na K nasadíme **LP**, tj.definujeme
vlastnost invariantní ≈ <m, n> je celé číslo (iff ∃x xn=m)
Fx: N≈M, pak F(N)→F(M)
restrikcí kontextu na invariantní vlastnosti vůči ≈ získáme **kontext abstrakce K_A**
C) v K_A pro T platí
N≈M iff ∀F F(N)↔F(M)
z LP N=M
≈ se proměňuje v =,
D) jména přeznačíme abstraktorem na jména #T
N → #N
<m, n> → m, n
tím se z něj stává jméno abstraktního předmětu, žádné kouzlo, ale jen odkaz k restringovanému kontextu

toto je podstata logické abstrakce, odhlédnutí od určitých rozlišení
identita je non-distinkce

výraz zůstává stále týž, to co se mění je jeho použití, věty které předpokládáme že platí
analyzovali jsme sloučeninu
analyzovali jsme pojem sloučeniny
pojem, funkce, vlastnost fungují jako abstraktory

pravdivostní podmínky pro identitu (konstituci, abstrakci) předmětů
LP obecné podmínky pro rovnost (konstitutivní moment)
SP speciální podmínky
fyzické předměty - spojitost časoprostorové trajektorie mezi smyslovými reprezentacemi
v rámci DA
SP dodávají ekvivalenci mezi reprezentanty (původními předměty, různými, které chceme vidět jako reprezentanty téhož), LP tah na omezení kontextu, v němž bude platit definice abstrakcí:
#N=#M# iff SP, není čistě deskriptivní, preskripci reprezentuje LP
DA=SP+LP

2) druhá námitka, zda se definicí abstrakcí nedostaneme do sporu se zákony rovnosti, kterou zde mezi určitými předměty postulujeme
definujeme předměty via rovnost mezi nimi
§65 ne, protože LP součástí DA (byť v preskriptivní formě)
„jediné co víme o nových předmětech je jejich rovnost, vše ostatní musí být zařízeno, aby platilo LP“
rozpis řečeného: stanovíme ekvivalenci s pretenzí rovnosti, vyloučíme nonvariantní predikáty

SHRNUTÍ ZE 14. 4. 2003

3) námitka (§66)
HP (DA pro směry přímek) neohodnocuje všechny identity kontextu
pouze pro $\uparrow F = \uparrow M$, nikoli $\uparrow F =$ Anglie, směr zemské osy
nerestringovaná kvantifikace, cokoli má tvar jména zahrnuto do univerza;
nicméně problém zůstává: DA zde není univerzálním kritériem identity pro všechna jména kontextu, některé rovnosti zůstávají nerozhodnuty (otázka ovšem zda jiné připustíme)

§68
DA odvrhnuta a nahrazena explicitní definicí (ED)
Dummett: šok, proti původnímu rozhodnutí, přesvědčení, že je nutné číslo definovat kontextuálně (exegetický problém)

vlastně se jedná také o abstrakci, známou z TM
nový předmět se uchopí jako ekvivalenční třída předmětů původních

MNOŽINOVÁ ABSTRAKCE

množina X pův. předmětů, ekvivalenci $\approx$ $\rightarrow$ množina tříd abstrakce
$Y=\{[x], x \in X\}$
$[x]_{\approx}=\{y, y \approx x, y \in X\}$

1) přímky, rovnoběžnost //	směr přímky a = $[a]_{//}$ rozsah pojmu „rovnoběžný s a“
2) trojúhelníky,podobnost	tvar trojúhelníka = rozsah pojmu ...

problém že toto probíhá v TM pro niž je výraz třída, resp. **rozsah pojmu**, tj. operátor {} nedefinovatelný, základní
je to ale také abstraktum, něco odvozeného, co by mělo být definováno

EXPLICITNÍ vs KONTEXTUÁLNÍ DEFINICE
předmět dán rovností,
definiendum = definiens
TM, $\emptyset = \{x;\ x \neq x\}$ (množina z P existuje z existence nějaké množiny a schématu vydělení)
$alef_0$=nejmenší nekonečný kardinál
novému znaku na L přiřazuji známý předmět z P
otázka:
jaký předmět je podle HP přiřazen např.výrazu $N\ x \neq x$

neurčitost deixe, co je přiřazeno jménu „Pražský hrad“, „trójský kůň“ mávnutí ruky nestačí, je zapotřebí kritéria identity, totéž platí pro $N\ x \neq x$

na otázku: jaký předmět HP přiřadilo $N\ x \neq x$ lze odpovědět právě jen
ten samý jako N F za předpokladu, že F eq $x \neq x$ (trójský kůň je danajský dar)

u explicitní definice je problém vyřešen je zdánlivě
u $\emptyset$ bychom řekli $\{x;\ x \neq x\}$,

ale co u $\{x; x \neq x\}$?

a to je právě problém s abstrakcí množin (rozsahů)
v GL se Frege snaží problém obejít: „předpokládám, že je známo, co je to rozsah pojmu“, v GG ovšem definována právě skrze DA

	výrokové formy (pojmy), stejnost extenze	$\rightarrow$	třída (rozsah pojmu)
GV	$\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$		$\{x, Fx\}=\{y, Gy\}$

na otázku jaký předmět je $\{x; x \neq x\}$
ten samý jako $\{x; Fx\}$ za předpokladu, že $\forall x(Fx \leftrightarrow x \neq x)$

problém 3) ale zůstává, ptáme-li se, jaký předmět je N $x \neq x$
jsme s to odpovědět pouze pro jména tvaru N F (ten samý jako N F za předpokladu, ...), nikoli pro libovolné M, a to je defekt (otázka ovšem je zda takováto jména v kontextu máme)
odtud neeliminovatelnost definovaného ze všech kontextů, spec. výrazu N F = x

EXPLICITNÍ DEFINICE ČÍSLA
3) pojmy, rovnočíselnost

ED — počet F = rozsah pojmu „rovnočíselný s F“
$[F]_{eq} = \{G, G \text{ eq } F\}$

na druhou stranu explicitní def. není překvapení, Frege je často hájil
s ohledem na jejich: konzervativnost (eliminovatelnost)
která u kontextuální nenastává (diskuse viz Dummett), což ale není zcela fér s ohledem na její kreativní (konstitutivní, metafyzickou) povahu, která Fregovi velí přidat ji do GG jako axiom, GV – míšení obou rovin pak také vede ke sporu, přidává prvky do univerza, které je již obsahuje [pak eliminovatelná skutečně není, již v případě dvousortového univerza ovšem ano][5]

lze uvést i obecné racionale pro explicitní:
spojení a) čísla jakožto vlastnosti pojmů
b) čísla jako předmětu
pod číslo jako vlastnost spadají pojmy téže extenze
není to ovšem pojem 2. řádu, nýbrž jeho rozsah
lze rozepsat

	(pojmu trpaslík) přísluší číslo 7,
pojem	X přísluší číslo 7
rozsah	{X, X přísluší číslo 7} = 7 = {X, X eq trpaslík}

eliminace 7 z definice, vezmeme jeden z pojmů, jemuž 7 přísluší

[5] díváme-li se na DA jako na definici operátoru abstrakce
$f(F)=f(G)$ iff $F \approx G$
na předzhotoveném oboru předmětů, pak možná víceznačnost, kterou explicitní definice
$f(F)=\{G; G \approx F\}$
netrpí, my jí ovšem předměty vyrábíme, a to je problém (jehož si Frege nebyl v GG vědom)]

výklad (§70-79) - Humův princip

shrnutí:

1. k uchopení výrazu jako jména předmětu je zapotřebí specifikovat kritéria rovnosti pro substituovatelné výrazy kontextu, a to
2. a) obecně – LP
   b) konkrétně – podmínky konstituující daný obor (SP)
3. SP pro čísla má být Humův princip (HP):
   počet F = počet G iff jsou rovnopočetné, přísluší jim stejné číslo - lze jejich prvky jednojednoznačně (vzájemně jednoznačně) přiřadit
4. případ nezvyklé definice, tzv. definice abstrakcí (DA)
   $\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$ (kokrétně NF = NG iff F **eq**uinumerous G)
   definiens: F, G, $\approx$, LP   definiendum: #G
   původní předměty   nové předměty
5. konstitutivní role LP: z ekvivalence rovnost, výzva k restrikci kontextu
6. 3. námitka:
   a) HP nerozhoduje všechny identity kontextu, resp. rozhoduje jen tvaru #F = #G, ekvi:
   b) definovaný výraz #F je neeliminovatelný ze všech kontextů, např. typu #F=x (eliminovatelnost konstanty S: je-li D(S) její definice, pak pro každou větu A(S) existuje věta B bez S taková, že $D(S) \vdash A(S) \leftrightarrow B$)
7. explicitní definice: $\#F = \{G, G \approx F\}$(=$[F]_{\approx}$ třída abstrakce, konkrétně N F = {G, G eq F}); eliminovatelná (Fregův požadavek na korektní definici)

TECHNICKÉ REKVIZITY definice čísla
na rovnopočetnosti, tedy vysvětlení fráze
pojmu F přísluší stejné číslo jako pojmu G (F eq G)
závisí jak definice kontextuální
F eq G   »»»   N F = N G
tak explicitní
F eq G   »»»   N F= $[F]_{eq}$ = {G, G eq F}
přitom je zvláštní, že fráze má blíže k adjektivnímu, nežli substantivnímu užití číslovky

definice rovnopočetnosti
dříve z (prosté) funkce, Frege z relace[6]

relace (Beziehung) – význam vícemístného predikátu (dvojnenasycený)
z věty $S(N_1, N_2, ..., N_n)$ vyjmutím n jmen

---

[6] vycházíme zde z moderního rozlišení
funkční f   predikátové konstanty P
které u Frega chybí, resp. je jenom sémantické:
libovolné přiřazení v univerzu   do 1, 0
tj. na syntaktické úrovni není nijak vyjádřeno, lze tedy psát jak
filosof(Kant) = šovinista(Klaus)=1
hlavní město(Německo)=Berlín.
(totální) funkce je relace s požadavkem $\forall x \exists! y R(x,y)$, tj $\forall x \exists y R(x,y)$ a
netotální stačí $\forall x, y, z\ (R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow y=z)$
nyní lze definovat: f(x)=y   iff   R(x, y)

SHRNUTÍ Z 28. 4. 2003

výraz kategorie $T, T, \dots T \rightarrow S$

[odbočka

zatímco pojem nasycují předměty,	relaci jejich n-tice
a spadá pod pojem F(ilosof)	a stojí ve vztahu R k b
Kant	<Zeman, Vysočina>
Hegel	<Gross, lidi>
Pithart	<Škromach, smažený sýr>

uchopení relačního abstraktu jako množiny dvojic nefregovský; je to problém per se
zatím definován jen abstrakt pojmu $\{x, Fx\}$, resp. průběh hodnot $x;Fx$

možnosti
1) Russell, speciální abstraktor: $xyRxy$
2) Peano: z nedefinované dvojice $x;y$, $\{w, \exists x \exists y(w = x;y \,.\!\wedge R(x, y)\}$
3) teprve definice $x;y = \{x, \{x, y\}\}$ redukuje relace na množiny
4) Frege: dvojitý průběh hodnot, průběh průběhu hodnot
   $xyRyx$, x přiřazuje $yRyx$

předpokládá definici uspořádané dvojice (Wiener, Kuratowski)]

chceme relaci R jednojednoznačného vzájemného přiřazení, mezi třídou vidliček a nožů

<nůž1, vidlička1>
<nůž2, vidlička2>
....

§71

1) R je vzájemné přiřazení N a V

1.1) každému N je R přiřazena V	$\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Vy \wedge Rxy)$(N zobrazeno do V)
1.2) každému V v R odpovídá nějaký N	$\forall y(Vy \rightarrow \exists x(Nx \wedge Rxy)$(V zobrazeno do N)

§72

2) R je jednojednoznačné přiřazení N V

2.1) každému N nejvýše jeden V	$\forall xyz(Rxy \wedge Rxz \rightarrow y{=}z)$	(funkce)
2.2) každému V nejvýše jeden N	$\forall xyz(Rxy \wedge Rzy \rightarrow x{=}z)$	(prostá)

F je rovnopočetný s G (F eq G) iff existuje R které je vzájemné (einander) a jednojednoznačné (beiderseitseindeutig)

v §73 Frege okamžitě tvrdí a dokazuje HP jakožto teorém

$N\,F = N\,G$ iff F eq G

musí být dokázáno, že se rozsah „rovnopočetný s F“ rovná rozsahu „rovnopočetný s G“ iff ...
kde ovšem L: $[F]_{eq} = [G]_{eq}$
nápadné: ? máme kritérium rovnosti rozsahů

Frege: ← musí být dokázáno, že za předpokladu F eq G, když H eq F, pak H eq G,

jako kritérium rovnosti rozsahů Frege evidentně, byť implicitně, předpokládá
GV $\{x, Fx\}=\{y,Gy\}$ iff $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$
kde F a G jsou momentálně pojmy druhého řádu (v GG se změní)
tj.

SHRNUTÍ Z 28. 4. 2003

$[F]_{eq}= \{H, H \text{ eq } F\} = \{H, T(H)\}$ $[G]_{eq}= \{H, H \text{ eq } G\} = \{H, S(H)\}$
$[F]_{eq} =[G]_{eq}$ iff $\forall H(T(H)\leftrightarrow S(H))$ iff $\forall H(H \text{ eq } F \leftrightarrow H \text{ eq } G)$

máme-li GV, pak HP lze dokázat triviálně,
← nutno dokázat, že je eq relace ekvivalence, pak z F eq G a H eq F vyplývá H eq G
→ předpoklad $\forall H(H \text{ eq } F \leftrightarrow H \text{ eq } G)$, vezmi F eq F a dostaneš F eq G.

problém v GV, což je vlastně
DA tj. implicitní definice pro průběhy hodnot resp. množiny
rozsah pojmu F = rozsah pojmu G iff pod ně spadají tytéž předměty (pojmy nižšího řádu); axiom extenzionality
implicitní definice se nám tedy vrátila, a to navíc ve formě, která obsahuje spor (Russellův paradox)

RUSSELLůV PARADOX
Russell, definuj predikát: být predikátem, který není predikován sám sobě
Frege: být rozsahem pojmu, který tomuto rozsahu nenáleží ($\neg P(\{y;Py\})$
zapisujme bybí $\{y;Fy\}$ jako #F
GV jako speci DA (aby bylo vidět, že se jedná o jediný předpoklad)
$\#F = \#G$ iff $\forall x Fx\leftrightarrow Gx$

Def $Gx:\equiv \exists F(x=\#F\wedge \neg Fx)$
? $\neg G(\#G)$, nechť ano, pak z Def
$\forall F(\#G=\#F \rightarrow F(\#G))$
antecedens platí pro G (zákon rovnosti, $t_1=s_1\rightarrow f(t_1)=f(s_1)$), a tedy $G(\#G)$
? $G(\#G)$, pak z Def
$\exists F(\#G=\#F\wedge \neg F(\#G)$
pro toto F platí z GV $\forall x(Fx\leftrightarrow Gx)$, tedy
$\forall x(\neg Fx\leftrightarrow\neg Gx)$
tedy $\neg G(\#G)$

tím se zdá být Fregova práce znehodnocena, neboť ze sporné formule lze odvodit libovolnou

ve skutečnosti tomu tak není, analýza problému inkonzistence prostředky TEORIE MODELů

tj dívejme se na
DA $\#F = \#G$ iff $F \approx G$
jako na pokus o zavedení nového funktoru # kategorie $((T\rightarrow S)\rightarrow T))$; tj. předpokládejme množinovou sémantiku, které nad nosičem D interpretací resp. valuací I přiřazuje
jmenným konstantám resp. proměnným N, M prvky nosiče I(N)
predikátovým konstantám resp. proměnným F, G (predikáty) podmnožiny nosiče I(F)
v DA se snažíme o implicitní definici funkce # druhého řádu, která podmnožinám univerza přiřazuje prvky univerza

GV $\#F = \#G$ iff $\forall x Fx \leftrightarrow Gx$

GVb ($\leftarrow$) princip extenzionální sémantiky, (predikáty se stejnou extenzí jsou zaměnitelné, „identita“ pojmů), zde platí dvojnásob, neboť množina je určena svými prvky, tedy I(F) = I(G), a tudíž i I(#F) = I(#G), jinak by I(#) nebyla funkce, tj. jednomu předmětu by přiřazovala různé, tato strana je **analyticky pravdivá**

GVa ($\rightarrow$) $\#F = \#G \rightarrow (\forall x Fx \leftrightarrow Gx)$

když I(#)=f, pak GVa chce, aby

pro libovolnou množinu X, Y $f(X) = f(Y) \rightarrow X = Y$, tedy aby f byla prostá,

jinými slovy: systém všech podmnožin nosiče P(D) má být f injektivně zobrazen do D, tedy aby každé podmnožině univerza D odpovídal právě jeden prvek univerza

pak by P(D) měla menší nebo stejnou kardinalitu jako D, tj $|P(D)| \leq |D|$

Cantorova věta: $|X| < |P(X)|$

X lze prostě zobrazit do P(X), g: $x \rightarrow \{x\}$, tedy $|X| \leq |P(X)|$

nechť existuje f prostá, zobrazující X na P(X); vezmi

$y = \{u,\ u \in X \wedge \neg\, u \in f(u)\}$

jelikož na, y musí mít vzor, nechť f(v) = y

$y \in y$, pak $\neg\ y \in y$ a vice versa

tedy f neexistuje

tedy GVa je neplatný v libovolné interpretaci, tedy kontradikce, analytická nepravda
[přes Cantorovu větu také na paradox přišel Russell]

uvažme HP (per se)

$\#F = \#G$ iff F eq G

iff $\exists f\, ((fx=fy \rightarrow x=y) \wedge \forall x(Fx \rightarrow Gfx) \wedge \forall y(Gy \rightarrow \exists x(Fx \wedge y=f(x))$

jak je to s jeho platností, opět značme I(#) jako f

HPb ($\leftarrow$) X eq Y $\rightarrow$ f(X)=f(Y), tj. tentýž předmět je přiřazen množinám, které mají stejný počet předmětů; žádný problém

HPa ($\rightarrow$) $\#F = \#G \rightarrow$ (F eq G)

f(X) = f(Y), pak X a Y mají stejný počet prvků; konverzí:

množinám s různým počtem prvků přiřazeny různé předměty

tedy systém E(D) tříd ekvivalence rovnopočetnosti na P(D) ($E(D)=\{[X]_{eq},\ X \in P(D)\}$) lze prostě zobrazit do D

to neplatí v konečných D

n prvků

třídy ekvivalence	prvky
n prvkové podmnožiny	a_n
n-1 ...	a_{n-1}
...	...
1 prvkové	a_1
prázdná třída	nic nezbylo

tedy HP resp HPa nelze splnit v konečných doménách

v nekonečných ano,
zkonstruujeme spočetný model HP; mějme spočetně nekonečné univerzum D, g bijekci D a přirozených čísel
definuj interpretaci I tak, aby I(#)=f:

f(X): = g(0) když X nekonečné
= g(n+1) když má X n prvků

interpretace ‹D, I› je modelem HP.
(model pro libovolnou kardinalitu $\aleph_m$ zkonstruujeme takto: vezmi množinu M ordinálů $\leq \aleph_m$, definuj funkci f tak, že pro libovolnou podmnožinu X množiny M $f(X) = \lambda$ takový kardinál, že $|X|=\lambda$ (M obsahuje kardinalitu libovolné podmnožiny)
obecně: pro libovolnou nekonečnou množinu X platí, že počet různých kardinalit podmnožin X je nejvýše roven kardinalitě X)

tedy HP narozdíl od GV

1) není kontradiktorický
2) neplatí v konečných doménách (syntetický?)

z toho lze tušit, že využit jako (implicitní) definice (hilbertovský axiom) narozdíl od GV

1) nevede k tradičním paradoxům
2) nějakým způsobem garantuje (vynucuje si) na něm vystavěné aritmetice existenci nekonečně mnoha předmětů (v TM a TT zapotřebí axiomu nekonečna)

Boolos, Heck, Wright
v Grundlagen a GG je sporný GV užit pouze k explicitní definici čísla a odvození HP, dále nevyužíván, tj při vlastním odvození aritmetických teorémů používán jen konzistentní HP
nazveme-li L2 + HP Fregovou aritmetikou (FA), lze dokázat

1) obvyklé antinomie se na FA nevztahují, lze se domnívat že je konzistentní
2) Fregův teorém: FA $\vdash$ PA2

výklad (§79-83) - ancestral

zkoumání formulí tvaru

DA $\#F = \#G$ iff $F \approx G$

tj. implicitních definic funkce # (funkce vymezené DA jakožto axiomem) z pojmů do individuí, tj. z P(D) do domény D, které vyžadují, aby funkce respektovala ekvivalenci ≈, tj. neekvivalentním množinám přiřazeny různé předměty

což značí, že

předmětů D musí být alespoň tolik, co tříd ekvivalence z $P(D)_{\approx}=\{[X]_{\approx}; X\varepsilon P(D)\}$

tj. $|D|\geq|P(D)_{\approx}|$ (operátor kardinality není nic jiného než Fregův operátor počtu N, definovaný stejně, tj. jednojednoznačným vzájemným přiřazením, přičemž $X \geq Y$ přirozeně značí, že existuje takovéto přiřazení mezi Y a částí – vlastní nebo nevlastní – X), z toho nyní

a) GV neplatí, protože $|P(D)_{\approx}| = |P(D)|$ což z Cantorovy věty $> |D|$
b) HP neplatí v konečných doménách, kde pro $|D| = n$ se $|P(D)_{eq}| = n+1$; v nekonečných ovšem $|P(D)_{eq}| \leq |D|$
c) DA pro $X \approx Y$, když $(X - Y) \cup (Y - X)$ je konečné (tj. X a Y se liší jen konečně mnoha prvky), platí jen v konečných doménách, neboť v nekonečném D $|P(D)_{\approx}| = |P(D)|$[7]
d) DA pro $F \approx G$ iff $\forall x(Fx\leftrightarrow Fx)\wedge(Gx\leftrightarrow Gx)$ v libovolné doméně, neboť $|P(D)_{\approx}| = 1$

[
byli jsme ovšem nucení zaujmout formalistické stanovisko (Hilbertův hotel), proti Fregovým intencím

funkce # definována jako ta, která splňuje
$\#F = \#G$ iff (F eq G)
těch je ale v dané nekonečné doméně nekonečně mnoho (permutační argument)
0, 1, 2, ... 0, 1, 2, ...
$\aleph_0$, 0, 1, .. 0, $\aleph_0$, 1, ...

Hilbertova implicitní definice pojmů via axiomy, které pro ně musí platit
pojmy nezachyceny jednoznačně, v nejlepším případě až na izomorfismus (což není případ PA)

zmizel konstruktivní, a tedy i explanační prvek, která byl v DA jakožto postupu od původních ke starým předmětům obsažen

problém konstruktivně chápaného GV

$\#F = \#G$ iff $\forall x(Fx\leftrightarrow Gx)$

může být, že v něm na L zavádíme nové předměty (průběhy hodnot, množiny) pomocí P, v níž proměnná x probíhá i přes ně, tj předpokládá je

proto bylo možné utvořit problematické formule jako $\neg F(\#F)$ apod.

jednoduchá cesta (TT, konstruktivismu) ven z paradoxu je uvažovat dvě oddělené domény, tj. chápat #F jako substituovatelný term nové

proměnná x se vztahuje k D1	základní úroveň, praelementy
jméno #F k D2	množiny elementů

[7] jelikož pro $\kappa = |D|$ je systém konečných podmnožin D roven κ, platí, že pro libovolnou $X \subseteq D$ je $|[X]_{\approx}| \leq |D|$, tedy neekvivalentních X musí být $|P(D)|$.

kde již F není nutně predikátem, a tedy není třeba uvažovat větu F(#F)
jádro paradoxu ale netkví ani tak v možnosti vyvářet fle jako F(#F), což umožňuje i HP (!), ale v možnosti vyvářet více jmen různých předmětů, než jich je v původní doméně: Russellův paradox ukazuje, že objekt #G, pro $Gx :\equiv \exists F(x=\#F \wedge \neg Fx)$ nemůže patřit do původní domény]

DALŠÍ DEFINICE A VĚTY
sledujeme Grundlagen, od §74 chápeme HP jako definici, ignorujeme že byl dokázán z GV
§74 [Def1 **eq**]
§72
Def2 x je kardinální číslo (Anzahl) když existuje pojem, že mu x náleží

$$\mathbf{A}x \quad \text{iff}_{Def} \quad \exists F(NF=x)$$

Def3: 0 je číslo, které přísluší pojmu „neroven sám sobě“
Frege neformuluje explicitně $0 = [x\neq x]_{eq}$, tj, je to rozsah pojmu „rovnopočetný pojmu $x\neq x$“
implicitně $\mathbf{0} = N(x\neq x)$
§77 definicí dvě jsme získali předmět, 0, jak dospět k jedné
Def4 $\mathbf{1} = N(x=0)$
výhled na nekonečno
máme 1, 0, a platí

$$N(F) = N(G) \text{ iff } F \text{ eq } G$$

$$\neg((x\neq x) \text{ eq } x = 0)), \text{ tedy } (N(x\neq x)\neq N(x=0))$$

atd. $2 = N(x=0 \vee x=1)$
obecně lze vzít

$$n+1=N(x=0\vee \ldots.x=n)$$

to je ovšem pouhé schéma, nikoli formule

kdybychom měli k dispozici relaci bezprostředního následníka (resp. předchůdce) a zní definovatelnou relaci obecného následníka (ancestral) <, lze definovat

$$n+1=N(x=n\vee x<n)$$

RELACE NÁSLEDNÍKA
Begriffsschrift, vznik logiky, definice předka z relace přímého předchůdce

§75
Kor1: pojmu přísluší číslo nula tehdy a jen tehdy je-li prázdný
$\forall x\neg Fx \text{ iff } N\,F = 0$
důkaz $\rightarrow \forall x(\neg x\neq x)$, tedy F eq $x\neq x$, tedy $N\,F = N\,(x\neq x)=0$
$\leftarrow N\,F = N\,(x\neq x)$, tedy F eq $x\neq x$, tedy $\forall x(\neg x\neq x)$

§76 definice bezprostředního číselného následníka (bezprostředního následníka v řadě přirozených čísel) [problém s nekonečnem, které v té řadě také je])
? N F P N G
když pod něj spadá o jeden předmět méně
N (Schubertova symfonie) P N(Beethovenova)
obecně
Def5 n bezprostředně následuje v číselné řadě za m

resp. m bezprostředně předchází n v číselné řad (symbolicky m **P** n)
iff_{Def} $\exists F \exists x\, (Fx \wedge NF = n \wedge N(Fy \wedge y \neq x) = m)$

zde se mj. ukazuje potřeba indexovat operátor N proměnnou pojmu, jemuž je připisováno číslo, tedy $\exists F \exists x\, (Fx \wedge NxFx = n \wedge Ny(Fy \wedge y \neq x) = m)$

§77

Kor2: 0 P 1

důkaz: $Nx(x \neq x)$, $Nx(x=0)$,
vezmi Fx: x=0, a uvaž $Gx := Fx \wedge x \neq 0$
platí $\forall x \neg Gx$, tedy dle Kor 1, N G = 0
Nx Fx = 1 z definice, a tedy 0P1 cbd

§78

V1 $0Pn \rightarrow n=1$

V2, 3, 4 $NxFx=1 \leftrightarrow \exists! xFx$

V5 $(m_1Pn_1 \wedge m_2Pn_2 \rightarrow (n_1=n_2 \leftrightarrow m_1=m_2)$ (P je jednojednoznačné)

V6a $\forall x(x \neq 0 \wedge Ax \rightarrow \exists y(Ay \wedge yPx)$

V6b $\neg\, xP0$

důkaz V6b nechť xP0, ex. a, F, $Ny(Fy \wedge y \neq a)=0$, Fa contra Kor. 1

konstrukce řady přirozených čísel
máme 0, víme, že 0 nemá žádného předchůdce a že každé číslo má nejvýše jednoho bezprostředního následníka a právě jednoho bezprostředního předchůdce

kdyby se ukázalo, že každé číslo má bezprostředního následníka,
číselná řada začínající 0 nutně nekonečná (nelze se zacyklit, protože pak by 2 čísla měla stejného bezprostředního následníka)

Dedekindova charakterizace nekonečna
$\exists f$, a (prostá, totální $\wedge$ $\forall y f(y) \neq a$), tj. X je Dedekindovsky nekonečná je-li prostě zobrazitelná na vlastní část
ekvivalence: X je nekonečná iff X je Dedekindovsky nekonečná, platí ve směru $\rightarrow$ pouze za předpokladu AC
[HP si nevyžaduje pouze nekonečně mnoho předmětů, ale Dedekindovsky nekonečně mnoho]

DEFINICE OBECNÉHO NÁSLEDNÍKA
legenda
definice genetického předka R* z relace genetického rodiče R

$a\ R^*\ b$ iff $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n\ a\ R\ x_1, \ldots\ x_n\ R\ b$ a je pra^nrodič b
a je předek *b* iff a je rodič b $\vee\ \exists\ x_1$a je rodič $x_1 \wedge x_1$ je rodič b ...
když se k němu dostaneme jedním nebo dvěma ... kroky
nekonečná formule
logika nekonečných flí ekvivalentní logice vyšších řádů
v níž následník definovatelný

lze nahlédnout jak, totiž via iteraci relace R

1. pokus: řekneme, že a je předek b jestliže náleží množině X, v níž jsou všichni přímí předci b a která je uzavřena na R, tj. s každým x, které obsahuje, obsahuje i všechna y yRx

ta jistě obsahuje všechny obecné předky b, ale může obsahovat i jiné

tedy

2. a je předek b náleží-li nejmenší takové, definice minimálního uzávěru

definujme (§79):

Def 7a b následuje v R-řadě za a resp. a předchází b v R řadě

a**R***b iff $\forall F(\forall x(aRx \rightarrow Fx) \wedge (\forall yz\,(Fy \wedge yRz \rightarrow Fz)) \rightarrow Fb)$

[diskuze definice, dvojí výklad

a) kvantifikujeme přes množiny

b náleží každé množině, která obsahuje přímé následníky a a je uzavřena na aplikaci R

b) přes vlastnosti, F je tzv. dědičná vlastnost v R řadě iff $\forall xy\,(Fx \wedge xRy \rightarrow Fy)$

b má všechny dědičné vlastnosti, které mají všichni přímí následníci a

korektnost definice

a R* b iff b je skutečný obecný následník a (existuje posloupnost ...)

b) ← triviální, jeli b skutečný následník a, pak existuje posloupnost

$a\ R\ x_1, \ \ldots.\ x_n\ R\ b$

má-li x_1 dědičnou vlastnost F, má jí z definice i b

→ komplikovanější

mějme b, které splňuje aR*b a uvažme vlastnost Fx: x je skutečným následníkem a

platí: $aRx \rightarrow Fx$

$F(y) \wedge yRz \rightarrow Fz$

F je tedy dědičná a mají ji přímí následníci a, podle a R* b má b všechny dědičné vlastnosti které mají přímí následníci a, tedy i F

? zde ne zcela korektní

a) vlastnost „x je skutečný následník a“ jsme nebyli schopni definovat a teď ji používáme, abychom dokázali, že o b platí navíc
b) vezmeme-li jako Fx přímo aR*x, máme vlastnost, která kvantifikuje přes sebe (impredikativní) [může a nemusí být problém]
c) nechápeme-li vlastnosti extenzionálně, tedy jako závislé na výrazových možnostech systému, není nic nemožné na tom, aby vedle třídy skutečných následovníků existoval b, který má všechny dědičné vlastnosti a
d) viz rozdíl indukce 2. řádu a schématu indukce]

§81

Def 7b y náleží R řadě začínající x (nevlastní následník) resp. x náleží R řadě končící y (nevlastní předchůdce)

a**R***$^{=}$b iff (aR*b $\vee$ a=b)

iff $\forall F(Fa) \wedge (\forall yz\,(Fy \wedge yRz \rightarrow Fz)) \rightarrow Fb)$

§82

důkazová metoda: indukce

SHRNUTÍ Z 5. 5. 2003

I1

chceme dokázat, že když platí aR^*b, pak Fb

stačí dokázat $\forall x(aRx \rightarrow Fx)$

a z předpokladu Fy a yRz odvodit Fz

I2

$aR^{*=}b$

Fa

Věta 7a, b

I1 $(\forall x(aRx \rightarrow Fx) \wedge \forall y,z(Fy \wedge yRz \rightarrow Fz) \rightarrow (aR^*b \rightarrow Fb))$

I2 $(Fa \wedge \forall y,z\ (Fy \wedge yRz \rightarrow Fz) \rightarrow (aR^{*=}b \rightarrow Fb))$

a) důkaz triviálně z Def 7a

b) I1 $\vdash$ I2 nechť platí antecedent I2, pak i antecedent I1, předpokládejme, že aR^*b, tedy Fb, kdyby $a=b$,pak z platnosti Fa i Fb.

konkrétně

Def8 x je konečné číslo iff x náleží číselné řadě začínající 0

$Fin(x)$ iff $0P^{*=}x$

I2a když platí $0\ P^{*=}b$, pak i $F(b)$, tj. $(Fin(b) \rightarrow F(b))$

stačí $F(0)$

$Fx,\ xPy \rightarrow Fy$

$\forall F(F(0) \wedge \forall xy(Fx \wedge xPy \rightarrow Fy) \rightarrow \forall z(0P^{*=}z \rightarrow F(z))$

platnost I2 a I2a se opírá o definice 6 a 7

pro názornost lze P^* zapisovat jako $<$, $P^{*=}$ jako $\leq$

chceme už pouze dokázat, že je číselná řada nekonečná

tedy, že

$$Fin\ n \rightarrow \exists m\ nPm$$

v § 82-3 načrtnut důkaz věty

věta 9 $Fin\ n \rightarrow n\ P\ Ny(y \leq n)$

§82 ohlášen důkaz indukcí I2, kde $Fx := x\ P\ Ny(y \leq x)$

(9.1) $0\ P\ Ny(y \leq 0)$

(9.2) $aPb \wedge a\ P\ Ny(y \leq a)\ . \rightarrow b\ P\ Ny(y \leq b)$

důkaz (9.1) snadný, (9.2) nikoli, zapotřebí (§83)

věta 8 $Fin\ n \rightarrow \neg n<n$

což lze skrze I2,

z toho ovšem nelze dokázat (9.2), ale pouze

(9.2^) $Fin\ a \rightarrow (9.2)$

což Frege nezmiňuje,

nelze tedy aplikovat ani I2, ale

Kor3 (I3)

chceme dokázat, že když platí $aR^{*=}b$, pak Fb

stačí dokázat Fa

a z předpokladu $aR^{*=}x$, Fx a xRy odvodit Fy

$Fa \wedge \forall x,y(aR^{*=}x \wedge Fx \wedge xRy \rightarrow Fy)\ . \rightarrow (aR^{*=}b \rightarrow Fb)$

platí I2 $\vdash$ I3

tedy i věta 9
z níž vyplývá nekonečnost číselné řady

výklad §84-6) - nekonečno

přehled vět a definic do §83

Def1(rovnopočetnost):	F **eq** G iff $\exists R(\forall xyz(Rxy \wedge Rxz \to y=z) \wedge$ $\forall x(Fx \to \exists y(Gy \wedge Rxy)) \wedge$ $\forall y(Gy \to \exists x(Fx \wedge Rxy) \wedge \forall xyz(Rxy \wedge Rzy \to x=z)$
Axiom (Humův princip, HP):	**NxFx=NxGx iff F eq G**
Def2 (kardinální číslo):	**A**x iff $\exists F(NF=x)$
Def3:	**0** = $N(x \neq x)$
Def4	**1** = $N(x=0)$
Kor1	$\forall x \neg Fx$ iff N F = 0
Def5 (bezpr. následník)	m **P** n iff $\exists F \exists x$ (Fx $\wedge$ NF = n $\wedge$ $N(Fy \wedge y \neq x)=m$)
Kor2:	0 P 1
V1	$0Pn \to n=1$
V2, 3, 4	$NxFx=1 \leftrightarrow \exists!xFx$
V5	$(m_1Pn_1 \wedge m_2Pn_2 \to (n_1=n_2 \leftrightarrow m_1=m_2)$
V6a	$\forall x(x \neq 0 \wedge Ax \to \exists y(Ay \wedge yPx)$
V6b	$\neg$ xP0
Def 7a (následník v R řadě):	a**R***b iff $\forall F(\forall x(aRx \to Fx) \wedge (\forall yz\ (Fy \wedge yRz \to Fz)) \to Fb)$
Def 7b (nevlastní následník):	a**R***$^{=}$b iff (aR*b $\vee$ a=b)
V7a (indukce, I1):	$(\forall x(aRx \to Fx) \wedge \forall y,z(Fy \wedge yRz \to Fz) \to (aR^*b \to Fb))$
V7b (I2)	$(Fa \wedge \forall y,z\ (Fy \wedge yRz \to Fz) \to (aR^{*=}b \to Fb))$
Def8 (konečné číslo)	**Fin**(x) iff $0P^{*=}x$
Konvence	$a \leq b$ iff $aP^{*=}b$, $a<b$ iff aP^*b
V8	Fin n $\to \neg n<n$
V9.2^	(Fin a$\to$aPb $\wedge$ a P Ny(y$\leq$a)) $\to$ b P Ny(y$\leq$b)
Kor3 (I3)	$(Fa \wedge \forall x,y(aR^{*=}x \wedge Fx \wedge xRy \to Fy)) \to (aR^{*=}b \to Fb)$
V9	Fin n $\to$ n P Ny(y$\leq$n)

platí: I1 $\vdash$I2; V8 je dokázána skrze I2; V9.2^ skrze V8; I2 $\vdash$I3; V9 skrze I3 a V9.2^; V9.2^ a I3 Frege v GL (§82) neformuluje, protože se mylně domnívá, že lze V9 dokázat pouze skrze I2, totiž jeho aplikací na V9.2 ((aPb $\wedge$ a P Ny(y$\leq$a)) $\to$ b P Ny(y$\leq$b)), která ovšem z V8 dokazatelná není

díky V5 $(xPy \wedge xPz \to x=z)$ můžeme z P definovat tzv. následnickou funkci s(x)=y iff xPy, víme, že platí

P1	$\neg s(x)=0$	(V6b),
P2	$\forall xy\ s(x)=s(y) \to x=y$	(V5);

z V9 vyplývá $\forall x(Finx \to \exists yxPy)$, tj. s je definována na nevlastních následnících 0, přičemž každému přiřazuje prvek, který se v řadě zatím neobjevil; číselná řada začínající 0 je tedy nekonečná (0 je přiřazen různý člen z P1, nechť m (sss m-krát 0) první člen řady, kterému přiřazen nějaký n pro 0<n$\leq$m, tj. s(m)=n=s(n-1), z P2 tedy m=n-1, tedy s(m-1)=n-1, n-1 se nemůže rovnat 0, tedy m-1 byl přiřazen člen řady 0<n$\leq$m kontra předpoklad; tohle vlastně tvrdí V8)

P1, P2 dva Peano-Dedekindovy axiomy, zodpovědné za nekonečnost modelů, a to nekonečno dedekindovské

1) X je dedekindovsky nekonečná, existuje-li f prostá a a$\in$X takové že Domf=X a x$\notin$Rngf

2) libovolná nekonečná množina je dedekindovsky nekonečná za předpokladu AC; dk: máme-li nekonečnou X a výběrovou funkci g: $P(X) \rightarrow X$ takovou, že $g(X) \in X$, pak konstruujeme posloupnost
$a_1 = g(X)$, $a_{n+1} = g(X - \{a_1, ...a_n\})$, přičemž dedekindovskou f na X
jako $f(a_n) = a_{n+1}$ pro členy řady, $f(b) = b$ pro ostatní

chápeme-li P1 a P2 jako součást snahy o charakterizaci struktury přirozených čísel, pak nedostatečné právě s ohledem na ostatní možné prvky, které je splní (žádnému nebude přiřazena 0 a f na nich definovaná zůstane prostá); chceme aby v modelu byly kromě nuly pouze výsledky aplikace f na 0, tj. pouze prvky k nimiž se lze dostat konečně mnoha kroky, tj. pouze nevlastní následníci 0 – odtud potřeba **definice následníka**

y je nevlastní následník 0 (y je přir. číslo, Fin y) iff $\forall X(X(0) \wedge \forall x(Xx \rightarrow X(s(x))) \rightarrow Xy$
tj. y náleží každé množině i) obsahující 0
ii) uzavřené na aplikaci s

definice funguje, protože b musí být v každé množině splňující i), ii), tedy i v nejmenší takové, obsahující pouze nevlastní následníky 0; ta je ovšem definována právě podmínkou Fin x; tedy: definice funguje díky tomu, že se $\forall$ vztahuje i na definovanou množinu (vlastnost)

problém lépe vidět v diskurzu dědičných vlastností: $\forall F(F(0) \wedge \forall x(Fx \rightarrow F(s(x))) \rightarrow Fy$, tj. y je nevlastní následník 0 jestliže má všechny vlastnosti dědičné v s řadě které má 0

nechť existuje b které má všechny s-dědičné vlastnosti jako 0, ale neplatí Fin b; za F vezměme vlastnost Fin x;
platí a) Fin dědičná, b) Fin 0; ergo Fin b spor
[námitka: neptali jsme se zda Fin b, ale zda je b skutečný následník, odpověď: vezmi za f vlastnost „x je skutečný následník" a pokračuj stejně; námitka: snažíme se ověřit korektnost definice skutečného následníka, nemůžeme ji tedy při důkazu předpokládat]

impredikativita definice: předmět či vlastnost definovány pomocí totality, v níž se sami nacházejí (prostřednictvím kvantifikace, v jejímž oboru jsou) – Russellova diagnóza paradoxu

GV $\#F = \#G$ iff $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$
odvození paradoxu $\rightarrow$
$Gx := \exists F(x = \#F \wedge \neg Fx)$
?$G(\#G)$ a $\neg G(\#G)$ vždy opak;

DA byla obecně vysvětlena jako postup od původních k novým; zde ovšem původní „předměty", pojmy F ve své aplikaci předpokládají existenci předmětů nových, zaváděných, tj.smysluplnost vět $G(\#G)$; význam $\#G$ tady vysvětlen skrze sebe sama – bludný kruh;
konstruktivistické a TT řešení paradoxů – zakázat impredikativitu
sortace univerza

impredikativita ovšem neochromuje každou DA:
v GV $Gx := \exists F(x = \#F \wedge \neg Fx)$

z $G(\#G) = \exists F(\#G=\#F\wedge\neg F(\#G))$, pro F z GV platí, že $\forall x(Fx\leftrightarrow Gx)$ a tedy $\neg G(\#G)$

v HP z $G(\#G) = \exists F(\#G=\#F\wedge\neg F(\#G))$, pro F podle HP platí F eq G, z čehož nevyplývá $\neg G(\#G)$

víme ostatně, že HP je konzistentní

impredikativita HP neochromuje FA, naopak slouží je prostředkem (hybatelem) důkazu existence nekonečna

$Nx(x=Nx(x\neq x))\neq Nx(x\neq x)$

$x=Nx(x\neq x)$ ne-eq $x\neq x$,

protože pod první spadá právě jeden předmět, a to $Nx(x\neq x)$

podstatné u HP je, že „vytvářené“ předměty přidává do původního univerza, a to ad infinitum; předpoklad jeho konečnosti pak vede ke sporu; nekonečnost vyhovuje

GV přidával více předmětů kontra libovolná předpoklad (2^X proti X), odtud spor

definice $n+1=N(x\leq n)$ obsahuje navíc impredikativní definici následníka, která taková musí být, aby fungovala

[

uvažme verzi indukce, která kvantifikuje pouze přes predikáty aritmetického jazyka L 1. řádu (substituční kvantifikace resp. 1. řádové schéma)

SI $\forall\varphi(\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi x\rightarrow\varphi s(x))\rightarrow\varphi y)$

? zachytí PA =SI+ P1 + P2 pouze strukturu přirozených čísel

nemůže v případném modelu existovat b takový, že má všechny vlastnosti 0 děditelné v s řadě *vyjádřitelné v L* a není skutečným následníkem?

existence nestandardních modelů: c nová konstanta, $C=\{c\neq 0, c\neq s(0), ...\}$, každá konečná podmnožina C a PA mají model, tedy i C+PA; c není skutečným následníkem nuly, ale z platnosti PA musí mít všechny dědičné vlastnosti vyj. v L, které má 0

z toho je vidět, že φx:=„x je následníkem 0“ není vlastnost formulovatelná v L, protože pak by šlo dosadit z φ a usoudit $\forall x\varphi x$

vezmeme-li na definici následníka založenou větu jako další axiom

AI $\forall X(X(0)\wedge\forall x(Xx\rightarrow X(s(x)))\rightarrow\forall yXy$

pak je zřejmé, že

PA2=P1+P2+AI

je kategorickou teorií, neboť

a) z P1, P2 je každý její model (dedekindovsky) nekonečný
b) z AI je každý její model spočetný, totiž enumerovatelný funkcí s – vezmi množinu Y všech následníků 0 a pouze jich $\{0, s(0), ss(0), ...\}$, jelikož splňuje antecedent, platí i $\forall x x\in Y$, tedy vyčerpává celé univerzum, které lze takto izomorfně zobrazit na podmnožinu přirozených čísel

kategoricita PA1 narozdíl od PA dává tušit, že v L2 neplatí věta o kompaktnosti (zopakuj důkaz pro nestandardní model, každá konečná bude mít model, nekonečná nikoli), LST (PA2 nemá model libovolné nekonečné mohutnosti), ani věta o úplnosti

z kategoricity PA2 vyplývá sémantická úplnost, PA2 $\models\varphi$ iff N $\models\varphi$; kdyby L2 úplná, pak PA2 $\vdash\varphi$ iff N $\models\varphi$; tedy pro φ 1. řádu by $\{\varphi; N\models\varphi\}$ byla aritmetická.

]

byla to právě impredikativní povaha HP dovolující konstrukci nekonečně mnoha různých čísel sražením predikátů jako $x=Nx(x\neq x)$ či $x\leq Nx(x\neq x)$ opět na úroveň předmětu, aplikací operátoru N

zde vidíme, proč Frege potřeboval, aby číslo bylo analyzována jako předmět (prvek té nejnižší kategorie), a ne hierarchizovaná vlastnost ala Russell

úroveň 2	$\{\Lambda\}, \{\Lambda, \{a\}\}, ..$	úroveň čísel
úroveň 1	$\Lambda, \{a\}, \{a, b\}, ...$	x_1
úroveň 0	a, b, c (může být prázdná)	speci proměnná x_0

byla-li by např. dle původní analýzy číslo 5 vlastností všech pojmů, pod něž spadá 5 předmětů tedy vlastností 2. řádu; pak číslo 6, definované jako vlastnost pojmu „být číslem menší nebo rovno 5" by bylo vlastností 4. řádu, tedy předmět jiné kategorie

impredikativita HP vyhovuje právě tomu, že sama čísla mohou být počítána, číslo tedy může docela dobře spadat pod pojem, jemuž náleží, viz

Fx:=x je prvočíslo menší než dvanáct

NxFx=5, FNxFx

obecně platí: Fregově konstrukci čísel odpovídají dvě koncepce

a) té implicitní von Neumannova $\Lambda; \{\Lambda\}; \{\Lambda, \{\Lambda\}\}; ...$ (ordinální číslo)
b) explicitní (2 jako systém všech dvouprvkových) Russellova

obě se v použití vylučují, neboť a) prostupuje v TT napříč hierarchiemi(nelze kvantifikovat), b) v TM nejsou množinami (1 eq V), navíc v TT předpokládá axiom nekonečť a) prostupuje v TT napříč hierarchiemi(nelze kvantifikovat), b) v TM nejsou množinami (1 eq V), navíc v TT předpokládá axiom nekonečna

komentář (§84-6)

bylo dokázáno, že následníků 0 je nekonečno

§84

Def 9	∞_1 =Def Nx(Finx)
Věta 10	∞_1 P ∞_1

důkaz:(Fin x $\wedge$ x$\neq$0) eq Fin x (množinu N a N – {0} lze jednojednoznačně, vzájemně přiřadit), přičemž Nx (Fin x $\wedge$ x$\neq$0) P Nx Finx.

z toho a věty 8

věta 11	$\neg$Fin(∞_1)

interpretační problém, 0 aplikací N na x$\neq$x

? N(x=x) antinula, číslo všeho

?U Nx(x=x)=Nx(Finx)

v některých modelech ano (v uvedeném, spočetném), v jiných ne, např. pro D= $\{x, x\leq\aleph_1\}$, kdeI(#)=f takové, že pro $X\subseteq D$, $f(X)=|X|\in D$

v §85 se Frege hlásí ke Cantorově hierarchii nekonečen, takže U nejspíš nepovažuje za platné; U je nezávislou sentenci FA

univerzálně pojato je N(x=x) ve sporu s ZF doktrínou neexistence nejvyššího kardinálu

§85 Frege srovnává svoji definici „Anzahl" a Cantorovu „mohutnost" s tím, že se jedná o totéž, což je pravda

$$|X| = |Y| \text{ iff } X \text{ eq } Y$$

přičemž explicitní definice Cantorova

$$|X| \text{ je ordinál, který ne-eq žádnému ze svých předch.}$$

Cantorův „Anzahl“ znamená číslo ordinální; které bere Cantor za základní; Frege poukazuje na to, že v otázce „kolik“ není ani stopa po určitém uspořádání (kolikátý v řadě)

v §86 kritizuje Cantora za nepořádek v definicích

Komentář (§87-91) – analytičnost aritmetiky prokázána, Kant

viz přednáška 2-4

§87

matematické zákony nejsou prostě aplikovatelné na přírodu, nejsou to zákony přírody, ale zákony přírodních zákonů – měřící apriori fyziky

§88

Kant s ohledem na slabou logiku podcenil analytické zákony

analytické jakožto obsaženost predikátu v subjektu vázána na sylogistiku, konjunktivní doktrínu pojmu

nová logika dokáže definovat tak komplexní pojmy jako následník v řadě

ty tedy nejsou závislé názorech prostoru a času (časová sukcese)

Frege: bylo naznačeno, že aritmetika je analytická, neboť odvoditelná z analytických pravd;

problém: za východisko GV, u něhož Frege analytičnost předpokládal (byť s pochybnostmi); ten sporný (analytická nepravda),

ale v odvození se nevyskytuje, na jeho místo lze vzít HP; analytický?

námitka: neplatí ve všech doménách; ale to jsme při jeho stanovení nemuseli tušit: zvolili jsme ho na **základě analýzy jazykového úzu** (číslo jako něco, co náleží pojmům)

nevinně, bez požadavků na doménu, jsme vzali predikát $x \neq x$, vyrobili první předmět $Nxx \neq x$,vzali predikát $x = Nxx \neq x$ a tak postupovali ad infinitum

ať je HP analytický či ne, vidíme, že: ačkoli významné aritmetické pravdy jsou odvoditelné z HP (všechny nemůžou s ohledem na neúplnost PA2, tj neplatnost ekvivalence PA2 $\vdash \varphi$ iff PA2 $\models \varphi$), je toto odvození k jejich demonstrování nutné (nejsou selfevidentní) a naše poznání rozšiřuje;

Kantova definice analytického jako nerozšiřujícího naše poznání je tedy nepřesná (příčnou je přirozeně slabost sylogistiky)

aritmetické pravdy jsou v HP obsaženy jako květina v semeni, nikoli jako trám v domě

§89

s Kantem lze souhlasit, že geometrie je syntetická, tj. neodvoditelná z analytických, nenázorných principů

§90

analytičnost aritmetiky závisí na odvození z analytických principů *analytickými prostředky*,

každý krok musí být logicky evidentní – co to ale znamená (Wittgensteinova výtka Fregovi – exaktní myslitel se odvolává na evidenci)

odkaz k evidenci není nutný: přechod musí být logicky platný (modus ponens); (potřeba formulace sémantiky – Frege ještě dlužen, záhodno zejména v logikách vyšších řádů)

§91

k přehlednosti důkazů vede katalogizace užitých přechodů, vedoucí k logickému počtu (Rechnung):

takto lze odvodit zákony, které vypadají jako logicky neodvoditelné (syntetické, názorné):

> je-li R jednoznačná relace (funkcionální), a následují-li m a n po x v R-řadě (xR^*m, xR^*n), pak n předchází m, následuje m nebo je sním totožné ($mR^*n \vee m=n \vee nR^*m$) – posloupnost následníků je lineární (nikoli předchůdců)

podstatné není že to nahlédneme, ale že to dokážeme

Komentář (§92-105) – jiná čísla

přednáška č. 3, vznik pojmového písma z krize základů
18. a 19. století
číslo znamená číslo přirozené, počet; případně číselné racio, proporci
vznik nových čísel
a) iracionality, kvadratická (čtvercová) čísla $x^2=2$, neexistuje celé ani racionální takové, ale lze se blížit s libovolnou přesností (konstruktivní interpretace - iracionální číslo jako koncentrovaná posloupnost racionálních)
b) transcendentální čísla (pí), (lze čísla reálná získat z racionálních přidáním odmocniny?)
c) řešení $x^2=-1$, řešení vždy nad 0 (čistě formální algebra), kinematická interpretace, pohyb v rovině : přelom století Wessel, Argand (*i* reprezentuje pohyb o 90 stupňů ((1+0i)(i)=i
d) zobecněním - čísla vymykající se obvyklým algebraickým zákonům (Hamiltonova hyperkomplexní čísla, kvaterniony) – pohyb v prostoru: x+yi+zj+wk, i, j, k rotace tří kolmých rovin, neplatí komutativita ij=-ji=k, jk=-kj=i, $i^2=...=-1$

tento vývoj vyvolává určité otázky, probírány po řadě v §92 -
§92, Hankel: číslo jako pythagorejská substance padlo, otázka po jeho existenci neleží mimo subjekt ale v něm;
psychologistická libovůle, demonstrovaná:
§95, pro b>c nemá rovnice x+b=c celočíselné řešení; vezměmě c-b jako znak, který úlohu řeší a sním operujme jako s číslovkami 1, 2, 3, ...

1) lze ale postulováním řešitelnosti vytvářet čísla: x+1=2, x+2=1?, námitka: sporná
2) je tedy bezespornost kritériem?, různé bezesporné systémy které prakticky k ničemu
3) bezesporné a splňující jisté obecné zákony (ale které – viz kvarterniony)

§96 ani matematik nemůže věci libovolně vytvářet, nýbrž je jen objevovat rozuměj: ne v třetí říši platonistických předmětů, ale v nějaké fungující početní praxi

objev předmětu = objev koherentní řeči (koherence) s kterou lze něco počít (pragmatické kritérium) ve světě zkušenosti (korespondenční kritérium), v případě matematiky něco spočítat – jak sofistikované se toto „počítání" skrze staletí může stát je jiná věc; dnes provádíme „počty" se samotnými zákony počítání (metamatematika) apod.

Fregova logika v širším smyslu zahrnuje snahu najít ty nejobecnější zákony předmětné řeči tj. zákony předmětné konstituce bez ohledu na obor

větný systém S, systém substituovatelných výrazů T
je elementární **obor řeči** O = <S, T> iff

1) WP: každá věta jednoznačně W, F
2) ASP pro T, tj je-li A(M) věta S, pak i A(M/N) pro libovolné

aby výraz denotoval předmět, musí být rozhodnuty identity kontextu

elementární obor řeči je e. **předmětným oborem** iff

1) obsahuje identitu M=N pro M, N z T (tím pádem z ASP všechny)
2) platí LP: M=N je W iff pro libovolnou větu A(M) z S platí, že A(M) je W tehdy a jen tehdy když A(M/N)

elementární obor řeči rozšíříme na obor řeči komplexní formy O* = <S*, T> takto
A) rozšíříme S na S* těchto vlastností
1) $S \subseteq S^*$
2) jsou-li A, B z S*, pak i $\neg A$, $A \wedge B$
3) je-li A(M) z S*, pak $\forall x A(M/x)$, kde x se v A(M) nevyskytuje
4) S* je nejmenší taková

B) ohodnotíme S* jednoznačně W a F, přičemž vždy předpokládáme, že A, B, A(M/N) pro všechna N z T již právě jednu hodnotu mají
1) $A \wedge B$ je W iff A je W a B je W; jinak F
2) $\neg A$ je W iff A je F; ..
3) $\forall x A(x)$ je W iff A(M/N) je W pro každé N z T; F jinak

indukcí podle počtu přidaných spojek dokážeme, že pro O*=<S*, T> platí WP; ASP platí triviálně a LP se přenáší;
takže O* je oborem řeči resp, předmětným oborem iff O

ilustrujme si nyní výše schematizovaný proces předmětné konstituce na příkladě aritmetického systému $A = \langle \Sigma, \Pi \rangle$. Třída Π, nazývaná též třídou číselných termů, nechť je popsána následující rekurzí:

(1) Π obsahuje všechny číslovky 1, 2, ... nazývané také *standardními jmény* systému (numerály)

(2) náleží-li N a M systému Π, pak i $N + M$ a $N \times M$.

Třídu Σ elementárních vět tvoří pouze

(1) rovnosti $N = M$ pro libovolné N, M z Π,

(2) nerovnosti $N < M$ pro libovolné N, M z Π.

Způsob, jak těmto větám přiřadit pravdivostní hodnotu, je známý již ze základní školy – totiž pomocí jistých výpočetních algoritmů, jejichž prostřednictvím nejprve transformujeme složené výrazy na výrazy standardní (numerály), provádíme jejich substituce (s odkazem na LP) a výsledná srovnání. (lze dále precizovat ala Lorenzen)
platí WP, ASP, LP
příklad jak z ohodnocení vět (specifikace pravdivostních podmínek, zvláště pro identity) dospět k předmětům

Fregovi šlo ale o čísla jakožto logické předměty
ohodnocení elementárních vět, rovností, nebylo logické, ale via algoritmy coby speciálními podmínkami rovnosti (SP vs. LP jakožto podmínky obecné);
k tomu, abychom ukázali, že jsou čísla logické předměty, zapotřebí najít SP, které by byly analytické; tím měl být původně GV

plán byl takový: nejprve bude zkonstruován předmětný obor průběhů hodnot s pomocí GV jakožto kritéria identity (SP oboru); z něho pak budou vydělena čísla jakožto průběhy speciální vlastnosti (odtud explicitní definice čísla: průběh hodnot pojmu „být rovnopočetný s ...“)

Jazyk systému $G = \langle \Sigma_G, \Pi_G \rangle$ je jazykem teorie množin s “$\in$” jako jediným mimologickým predikátem.
Nejprve definujme třídu termů Λ_G systému G takto:

(1) termy jsou všechny správně utvořené formule predikátové logiky prvního řádu s rovností v jazyce tvořeném pouze dvojmístnou predikátovou konstantou “$\in$”,

(2) je-li T(y) term s volnou proměnnou *y*, pak pro řecké písmeno ε, které se v T(y) nevyskytuje, je $\acute{\varepsilon}$T(y/ε) také term,

(3) je-li T(y) term s volnou proměnnou *y* a U je také term, pak i T(y/U).

Systém substituovatelných jmen Π_G tvoří všechny uzavřené termy z Λ_G začínající $\acute{\varepsilon}$. Systém vět Σ_G je pro libovolná jména T, U z Π_G tvořen všemi výrazy

(1) $T \in U$,

(2) $T = U$.

Pravdivostní podmínky vět formy N = M jsou určeny (i) skrze GV a konvenci a (ii) skrze LP.

Věty formy $N \in M$ mají být ohodnoceny tak, aby uvažované větě byla přiřazena hodnota W, existuje-li jméno tvaru $\acute{\varepsilon}T(\varepsilon)$ takové, že $T(\varepsilon/y)$ nezačíná řeckým písmenem a výrazům $M = \acute{\varepsilon}T(\varepsilon)$ a T(N) je přiřazena W; jinak F.

Russellův paradox

jméno $\acute{\varepsilon}(\varepsilon\notin\varepsilon)$

jaká hodnota větě $\acute{\varepsilon}(\varepsilon\notin\varepsilon)\in\acute{\varepsilon}(\varepsilon\notin\varepsilon)$; stejná jako větě $\acute{\varepsilon}(\varepsilon\notin\varepsilon)\notin\acute{\varepsilon}(\varepsilon\notin\varepsilon)$

takže nelze splnit WP a podmínky výše uvedené

?analogicky předmětný obor čísel s pomocí HP, konzistentně ohodnotitelný

zřejmě lze, ale komplikovaněji

pravá strana GV, tj. $\{x, Fx\}=\{x,Gx\}$ iff $\forall x(Fx\leftrightarrow Gx)$ prvořádová

což u HP neplatí NxFx=NxGx iff $\exists$R R jednojednoznačné vzájemné přiřazení F a G

nutno zkonstruovat předmětný obor pro logiku 2. řádu;

otázka kvantifikace $\forall F(F(N))$, přes co – když přes predikáty, odpovídá každému rozdělení jmen z T predikát, který splňuje pouze vydělená část?

v oboru A přirozených čísel pro aritmetický jazyk nikoli (příčina selhání schematu indukce)

[

obecně: formulí jazyka A je spočetně, tedy je lze uspořádat do řady

$P_1(x)$

$P_2(x)$

$P_3(x)$

...

uvaž takové vydělení v množině přirozených čísel, obsahující všechna x, o nichž $P_x(y)$ neplatí,tj. $\neg P_x(x)$ (diagonální argument),

vydělení $\neg P_x(x)$ není v řadě, protože kdyby ano, pak by bylo ekvivalentní nějakému $P_n(x)$ a $P_n(n)$ by platilo iff $\neg P_n(n)$

z toho ale neusuzujeme na nepojmenovatelnost každé podmnožiny přirozených čísel, pouze na její nepojmenovatelnost fixními výrazovými prostředky (které lze vždy obejít – definice vydělení $\neg P_x(x)$ bylo mimo původní jazyk)

]

substituční kvantifikaci lze tedy rozšířit do silnější podoby, sama otázka druhořádového předmětného oboru s sebou ovšem nese potřebu vyjasnit tolik dalších problémů, že zde již pro ně není místo

Resumé (§106 -109)

pohled zpět

1) co číslo není: subjektivní představou, fyzickým předmětem, skupinou věcí
2) co číslo je: součást objektivní výpovědi o pojmu; „Sněhurka má 7 trpaslíků“ ekvivalentní „pojmu Sněhurčin trpaslík přísluší číslo 7“
3) pokus uchopit číslovku jakožto adjektivum, vlastnost pojmů; selhal
    a. neumožnil kvantifikovat (falešný důvod) – n pevnou součástí kvantifikátoru $\exists_n xFx$
    b. neumožnil důkaz nekonečně mnoha čísel a vedl k vzniku číselných hierarchií (pojmu „být prvočíslem <12“ přísluší číslo vyššího typu)
4) číslovka uchopena jako substantivum: „počet Sněhurčiných trpaslíků = 7“, číslo je význam vlastního jména
5) předmět coby význam vlastního jména znamená znovurozpoznatelný předmět, zapotřebí specifikovat kritéria identity číselných termů, a to
    a. obecně, pro libovolné jméno – Leibnizův princip
    b. konkrétně, pro číslovky, resp. výrazy typu: počet F (symbolicky NxFx) – Humův princip: NxFx = NxGx iff F a G rovnopočetné (eq)
6) HP jako zvláštní případ definice abstrakcí, 3. námitky
    a. nezvyklost, analogie rovnoběžnosti přímek
    b. možná rozporuplnost LP a HP (restrikce kontextu)
    c. specifikována pouze kritéria pro NxFx=NxGx, nikoli NxFx=M
7) explicitní definice NxFx jako {G,G eq F}
8) dokázán Humův princip, pomocí implicitního axiomu extenzionality GV: $\{x, Fx\}=\{x, Gx\}$ iff $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$
9) pouze s pomocí HP a logiky Begriffsschrift (logiky vyšších řádů) definována rovnopočetnost, 0, 1, následník v řadě, indukce, nekonečnost číselné řady, existence nekonečného čísla