Zahl – *1. Zum Begriff.* Die Zahlen (Z., Zn.) sind erstens *Momente* (Hilfsmittel) einer Praxis des Zählens, Rechnens und ↑Messens, und zweitens *selbständige Objekte* der Untersuchung, welche eigene Eigenschaften und eigene Urteilsformen verlangen. Diesem Unterschied liegt der Übergang von den sog. *benannten* Zn., wie 5 Äpfel, 3,5 Pfund oder √2 Fuß, zu *reinen* Zn., wie 5, 7/6 und √2, also der Unterschied zwischen einem Satz wie «Im Korb gibt es 5 Äpfel» zu «5 ist eine Primzahl» zugrunde. Zwei Aspekte des allgemeinen Zwecks einer Zählhandlung spiegeln die *Kardinalzahlen* als Antworten auf die Frage ‹Wie viele?› bzw. die *Ordinalzahlen* als Antworten auf die Frage ‹Das wievielte?› wider. Die reellen Zn. antworten als die sog. *Maßzahlen* auf die Frage «Wie groß ist eine Größe verglichen mit einer Einheitsgröße?», wie sie auch noch bei Frege[1] charakterisiert sind.
Neben den Zn., die in der Alltagssprache und Praxis ihren festen Platz gefunden haben und demgemäß als *natürlich*, *rational* oder *reell* bezeichnet worden sind, hat man für die Zwecke einzelner Wissenschaften einschließlich der Mathematik selbst weitere Zn.bereiche eingeführt; u.a. die sog. *negativen*, *algebraischen*, *imaginären*, *infinitesimalen*, *hyperkomplexen*, *transfiniten* und *Nicht-Standard-Zn.,*[2] die verschiedene gemeinsame Züge (Familienähnlichkeiten) mit der ursprünglichen Zn.bereichen und auch untereinander aufweisen. Gleichzeitig haben sich auch die Begriffe der natürlichen (kardinalen und ordinalen) und der reellen Z. (des Kontinuums) weiterentwickelt, und zwar nicht nur *extensional* (in gewissen Erweiterungen der natürlichen Zn.reihe und der verschiedenen reellen Z.körper), sondern auch *intensional* (es gibt verschiedene Konstruktionen des Kontinuums) und damit *begründungstheoretisch* (es gibt verschiedene Antworten auf die Frage «Was sind und was sollen die Zn.?»).

2. Zur Problem- und Begriffsgeschichte
Das Zählen ist eine grundlegende menschliche Tätigkeit, die schon in der Rechenkunst der Babylonier und Ägypter hoch entwickelt war. Aber erst in der griech. Mathematik ist die Z. zu einem Gegenstand des Denkens geworden, zunächst wohl in der altpythagoreischen Lehre vom Geraden und Ungeraden, wie sie im IX. Buch von Euklids *Elementen* erhalten geblieben ist. In den *Elementen* gibt es auch eine erste explizite Definition der Z. (*arithmos*) als «einer aus ↑Einheiten zusammengesetzten Menge (*plethos*)».[3] Diese Erklärung, die z.B. noch bei Cantor zu finden ist[4], ordnet die Z. eindeutig dem Bereich der *diskreten* Größen zu, die man zählt (Mächtigkeiten), im Unterschied zu den *kontinuierlichen* Größen, die man misst (Längen, Flächen, Volumina, Zeiten usw.).[5] Die *Einheit* ist dabei keine Z., sondern nur ein Prinzip des Zählens und Messens,[6] das als solches unteilbar bleiben muss.[7] Die kontinuierlichen Größen sind dagegen unbegrenzt teilbar,[8] gehören aber ebenso wie die diskreten Größen der Kategorie der ↑*Quantität* an.[9]

2.1 Proportionenlehre
Die weitere Entwicklung des Z.begriffs besteht darin, dass man die Quantifizierung der Größen auf ein gemeinsames Prinzip zurückzuführen versucht. Hierher gehört wohl schon die These der *Pythagoreer*, die Zn. seien Prinzipien aller Dinge.[10] Sie hängt vermutlich eng mit der Entdeckung der Tonintervalle und ihrer proportionalen Verhältnisse zusammen. Nach einer Entdeckung Zeuthens[11] muss es eine altpythagoreische Definition der Zn.proportion gegeben haben, und zwar durch die sog. *Wechselwegnahme* (*anthyphairesis*), die uns heute als Euklidischer ↑Algorithmus zur Berechnung der größten gemeinsamen Teiler bekannt ist und der Entwicklung eines Größenverhältnisses in einen Kettenbruch[12] entspricht. Für je zwei kontinuierliche Größen in einem gemeinsamen Größenbereich sucht diese *anthyphairesis* nach einem gemeinsamen ↑Maß.[13] Voraussetzung ist, dass in einem solchen Größenbereich hinreichend häufiges Aufeinanderfügen einer Maßgröße jede zu messende Größe übertreffen kann.[14] Dieses Prinzip ist das sog. *archimedische* ↑*Axiom* für echte Größen, aus denen die bloß so genannten unendlich kleinen oder unendlich großen Größen als uneigentliche Größen auszuschließen sind. Das Prinzip garantiert freilich nicht, dass das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht,[15] da es *inkommensurable* Größenverhältnisse geben kann (↑Inkommensurabilität), wie z. B. die der Seite und Diagonale des Quadrats bzw. Pentagons. Diese wurden dann ‹*alogos*› oder ‹irrational› genannt. Da man im empirischen Messen stets nur zu den rationalen Verhältnissen kommt, bedeutet diese Entdeckung nicht notwendig eine Widerlegung der pythagoreischen Lehre. Sie macht vielmehr den Unterschied einer idealen Form und ihrer Realisation, also der theoretischen und praktischen Mathematik deutlich.[16]
Die Entdeckung der Inkommensurabilität hatte den Vorrang der griech. Geometrie vor der Arithmetik begründet. Dieser wirkt bis in die geometrischen Deutungen der arithmetischen Gleichungen nach. Infolgedessen kannte die griech. Mathematik auch bis Diophant kein Rechnen mit Brüchen und auch keine Buchstabenrechnung. Insofern blieb sie der indisch-arabischen Algebra unterlegen. Die griech. Proportionenlehre war insofern keine Theorie der rationalen bzw. reellen Zn., als man Proportionen nicht addieren und multiplizieren konnte: Sie bilden noch keinen Rechen- oder Z.körper, und zwar weil sich die Identifikation von reinen Proportionen mit Längen scheinbar aus logischen Gründen verbot. Die einzige Ausnahme war die sog. Zusammensetzung[17], die dem multiplikativen Zusammenfügen der Tonintervalle entspricht. Dabei wird jeweils unterstellt, dass sich die zusammenzufügenden Verhältnisse in eine bestimmte Form A:B mit vorgegebenem A bringen lassen, wozu man die Konstruktion der vierten Proportionalen benutzte. Ihre Ausführbarkeit mit Hilfe von Zirkel und Lineal drückte implizit die Kontinuität des Größenbereiches aus[18], für welchen auch die neue arithmetikfreie Definition der Proportion von Eudoxos gegeben war[19]: Die Größen A, B und C, D, die zumindest paarweise gleicher Art sind, stehen in denselben Verhältnissen A:B = C:D gdw. für alle ganzen Zn. m, n aus mB<nA stets mD<nC folgt und umgekehrt. Während man in der klassischen pythagoreischen Proportionenlehre nur Proportionen größer gleich 1 darstellen konnte (insofern und nur insofern konnte man die Einheit nicht teilen)[20], liefert die Neudefinition von Eudoxos auch (rationale und irrationale) Proportionen zwischen 0 und 1.

2.2 Arithmetisierung der Geometrie

Das kalkulatorische Element, das für die weitere Entwicklung des Z.begriffs entscheidend war, gelangte als indisches Erbe über die Araber nach Europa. Dabei spielte besonders die Durchsetzung der indisch-arabischen Ziffern und des Positionssystems (z.B. des Dezimalsystems von Stevin) eine große Role. Das ermöglichte ein hinreichend schnelles Rechnen und führte ein Rechnen mit der Null ein. Die kalkulatorische Lösung von Gleichungen durch algebraische Umformungen führte zu einer Auffassung der Zn. als Werten von Variablen, einschließlich derer, welche die Gleichungen zuerst nur fiktiv auflösen. So gelangte man neben der Null und der Eins auch zu rationalen, negativen (Stifels ‹fiktiven›) und imaginären (Cardanos ‹sophistischen›) Zn.. Noch lange enthielt man diesen aber den Status einer ‹wirklichen› Z. vor. Formal entspringen diese *algebraischen* Ausdehnungen dem Wunsch, die bekannten Operationen uneingeschränkt ausführen zu können.

Die Erweiterung des *geometrischen* Z.begriffs der Griechen wurde erst durch die Verbindung von Algebra und Geometrie in der *analytischen Geometrie* von Descartes ermöglicht. Indem Descartes eine Einheitsstrecke (E) willkürlich auswählte, konnte er reine Proportionen mit geometrischen Längen (X in A:B=X:E) identifizieren, also die Flächen und Proportionen in Längen einbetten. Seither sprechen wir von einer Zn.geraden. Es lassen sich dann die Proportionen ganz gleich wie die Längen linearisieren, addieren, multiplizieren und dividieren, und zwar ohne dass man beim Ergebnis einer Längenmultiplikation die Dimension ändern müsste. Mit Bezug auf Descartes gab Wallis[21] eine neue Z.definition, die später auch von Leibniz und Newton übernommen wurde und gegenüber Euklid die Z. als Maßzahl, also das abstrakte Verhältnis zweier Größen, erfasste.

Die Erfindung des *infinitesimalen ↑Kalküls* durch Leibniz und Newton entwickelte die symbolische Verarbeitung der Geometrie wesentlich weiter. Die durch die geometrischen und kinematischen Konnotationen geprägten Grundbegriffe (Fluente, Fluxion, infinitesimale Größe) ließen aber die Methoden des Kalküls wesentlich unbestimmt und waren sogar inkonsistent, worauf besonders Berkeley in seinem *Analyst* aufmerksam machte. Nach Lagranges Versuch, die Analysis ‹rein syntaktisch› (für Polynome und geeignete Potenzreihen) zu begründen, schlug Cauchy eine allgemeinere Präzisierung der zentralen Begriffe (Stetigkeit, Konvergenz, Ableitung) durch den Grenzwertbegriff vor. Als (Grenz)werte zulässiger Funktionen wurden die (reellen) Zn. im Rahmen der neu entstandenen *Funktionentheorie* von Euler implizit definiert.[22]

2.5 Logik und Mengenlehre

Die von Weierstrass weiterentwickelte Arithmetisierung der Analysis baute bei der expliziten Definition der reellen Zn. nur auf die natürlichen und rationalen Zn. auf. Während Cantors Definition[23] von dem Begriff *beliebiger* Cauchy-Folgen von rationalen Zn. ausgeht und so die *anthyphairetische* Definition liberalisiert, verallgemeinert Dedekind[24] den Ansatz von Eudoxos: Als so genannte *Schnitte* sind die reellen Zn. Zweiteilungen des gesamten Grundbereiches (der rationalen Zn.) in nichtleere Mengen A, B, so dass für jedes a aus A und b aus B stets a < b gilt. Eudoxos` Definition war auf den Bereich der Größen beschränkt geblieben, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Im Gegensatz zu der von Aristoteles[25] und Kant[26] kodifizierten Auffassung verwandeln Cantor und Dedekind das Kontinuum in eine *aktuell-unendliche* Punktmenge.

Die strukturtheoretische Untersuchung der linearen Punktmengen regte Cantor an, die transfiniten Ordinalzahlen als Indizes einer Operation f einzuführen[27], die man, um zu ihrem Fixpunkt f(x)=x zu gelangen, *transfinit* oft wiederholen muss. Zugleich untersuchte er die Möglichkeit einer bijektiven Abbildung verschiedener unendlichen Mengen, um festzustellen, dass sein Kontinuum in diesem Sinne größer als die Menge der natürlichen Zn. (in diesem Sinn überabzählbar) ist. Durch die Verallgemeinerung des später angewandten *Diagonalverfahrens* gelangte Cantor zur Hierarchie der transfiniten Kardinalzahlen, womit die Ära der Mengenlehre als einer Theorie des ↑Unendlichen begann. Die neu eröffnete Möglichkeit, auch die unendlichen Größen der Ordnung und Mächtigkeit nach zu vergleichen und zu messen, schien eine ultimative Zurückführung alles Mathematisierbaren auf ein gemeinsames Prinzip darzustellen. Infolgedessen fasst man bis heute die Mengentheorie als Rahmentheorie der ganzen Mathematik auf und möchte sich aus ‹Cantors Paradies›[28] nicht vertreiben lassen.

In einer expliziten Auseinandersetzung mit der Philosophie Kants griff Frege das Arithmetisierungsprogramm mit der Absicht auf, jede ↑Anschauung aus der Arithmetik zu vertreiben.[29] Das ist die Idee einer begrifflichen Begründung der Mathematik, des so genannten *Logizismus*, die schon auf Leibniz und Bolzano zurückgeht. Sie ist auch mit dem Programm eines für die Zwecke der Analysis aufgebauten Argumentationskanons verbunden. Freges Hauptziel[30] besteht dabei in der Elimination der rekursiven Definition der arithmetischen Grundbegriffe, besonders der Zn.reihe 1, 1+1, 1+1+1, usw., die nach Kant von einer Konstruktion von (Laut-)Figuren und (zeitlichen) Folgen in der realen *Anschauung* abhängig sind. Frege möchte dagegen eine Definition des Begriffs der Z. durch explizite Aussonderung aus einem größeren Gebiet. Dazu braucht er eine ↑Logik zweiter Stufe, insbesondere für die Formel $\forall X(X(0) \wedge \forall x(X(x) \rightarrow X(x+1)) \rightarrow X(x))$. Den zugrunde liegenden Bereich sollten dabei die so genannten logischen Gegenstände bilden, die Frege[31] implizit als die *reinen* (im logischen Vokabular benennbaren) Mengen auffasst. Die Null ist als $\{y{:}y\neq y\}$, n+1 als $\{y{:}y=0\vee\ldots\vee y=n\}$ für alle $n\geq 0$ definiert. Damit antizipiert Frege die explizite Definition der Ordinalzahlen von Neumanns.

Den ontologischen Problemen Freges versuchte Dedekinds Logizismus[32] dadurch auszuweichen, dass er die Zn. nicht durch ein Prädikat aus einem bestimmten Gegenstandsbereich, sondern durch eine Formel aus allen möglichen Bereichen ausgliedert. Dazu dient ihm das axiomatische System der *Peano-Arithmetik*, in welchem Freges Prädikat zur geschlossenen Formel $\forall X(X(0) \wedge \forall x(X(x) \rightarrow X(x+1)) \rightarrow \forall x X(x))$ wird und zusammen mit zwei weiteren Forderungen $\forall x(x+1=y+1 \rightarrow x=y)$ und $\forall x(x+1\neq 0)$ eine eindeutige Beschreibung der

Struktur der Zn.reihe (bis auf die Isomorphie) darstellt. Indem sich Dedekind[33] verpflichtet fühlte, die Existenz mindestens eines unendlichen Gegenstandsbereiches nachzuweisen, tauchte bei ihm aber das ontologische Problem Freges wieder auf. Mit Russells Entdeckung am Beispiel des Terms $\{x, x \notin x\}$, dass die Gesetze der damaligen Mengenbildung schon im Bereich der reinen Mengen zu ↑Antinomien führen, kam das logizistische Projekt, trotz späterer typentheoretischer Rettungsversuche Russells, allmählich an sein Ende.

2.7 Formalismus und Intuitionismus

Nach Hilberts Vorschlag sind die logischen und mengentheoretischen ↑Paradoxien durch die systematische Ersetzung der *genetischen* durch die *axiomatische* Methode zu überwinden. Der Z.begriff würde so durch die Gesamtheit der Axiome und ihrer Folgen ‹vollständig› definiert, und zwar zunächst in Dedekinds *strukturalistischem* Sinne, den Hilbert[34] auf die reellen Zn. als die Struktur des vollständigen angeordneten Körpers erweiterte. Der Mengenbegriff wurde durch Zermelos Axiomatisierung der Mengenlehre bestimmt. Als Reaktion auf seine Auseinandersetzung mit Brouwer plädierte Hilbert später für eine rein syntaktische (formalistische bzw. finitistische) Deutung der Axiome und des Z.begriffs. Als bloße finite, inhaltsleere Buchstabenfolgen (konkrete Objekte) sind die Axiome ausschließlich auf ihre *Widerspruchslosigkeit* im Rahmen einer nach finiten Regeln operierenden Metamathematik zu überprüfen.

Im Gegensatz zum Logizismus und Formalismus radikalisierte Brouwers *Intuitionismus* die konstruktiven Ansätze von Kronecker und Poincaré, besonders in ihrer Kritik an Cantors Mengenlehre und am Konzept des Aktual-Unendlichen. Nach Brouwer ist Mathematik keine (axiomatische) Theorie, sondern eine *Tätigkeit* des schaffenden ↑Subjekts. Das gemeinsame Prinzip des Zählens (Aneinanderfügen von Einheiten) und Messens (wiederholte Zweiteilung von Einheiten) hofft er in der *Urintuition* der Zweieinigkeit, die der Zeitempfindung entspringt (↑Zeit), zu finden. Um den potenziellen Charakter (‹das freie Werden›) und die Stetigkeit des Kontinuums zu erhalten, deutete Brouwer den Cantorschen Folgebegriffs um. Als so genannte *Wahlfolgen* können Brouwers reelle Zn. sowohl durch ein Bildungsgesetz (gesetzartig) als auch ganz frei (gesetzlos) erzeugt werden; man kann mit den letzteren aber immer nur aufgrund eines endlichen Anfangsstücks arbeiten. Auf diese Weise gelangte Brouwer zu klassisch ungültigen Theoremen, z.B. dass jede reelle Funktion auf dem Intervall [0,1] gleichmäßig stetig ist. An Brouwers Intuitionismus knüpfen verschiedene Varianten des ↑*Konstruktivismus* an, die sich i.d.R. von seinem Mentalismus und Dogmatismus distanzieren und systematisch mit gesetzartigen Folgen arbeiten, u.a. die sog. *prädikative* (Weyl, Lorenzen), *rekursive* (Goodstein, Markov) und *konstruktive Analysis* (Bishop).[35]

3 Philosophische Problemfelder und Stand der Forschung

3.1 Zahlen und Sprache

Als philosophisches Thema sind die Zn. seit Platon durch ihr enges Verhältnis zur ↑Sprache und ihr kompliziertes Verhältnis zur empirischen Welt bestimmt. Im Hintergrund steht die Grundeinsicht, dass die unendliche Mannigfaltigkeit der wechselnden Phänomene nur durch die sprachliche Artikulation (*logos*) strukturiert werden kann. Zu deren Mitteln gehören die symbolischen (diskreten) Methoden der Arithmetik in prototypischer Weise. Das zeigen schon die normalsprachlichen Ausdrücke ‹er*zählen*› oder ‹‹to give an *account*›. Demzufolge erscheint auch der berühmte Vorwurf des Aristoteles[36], Platon identifiziere Zn. mit ↑Ideen, als ein Missverständnis.[37]

Die altpythagoreische Definition der Zn.proportion (*logos*) stellt dabei ein paradigmatisches Beispiel einer Invariantenerfassung durch die Ausdrucksgleichheit (*analogia*) dar. Deshalb scheint es passender, den Terminus ‹*alogos*› nach dem arabischen Muster als ‹ausdruckslos› zu übersetzen. In der Definition des Eudoxos erhalten dann die ‹unendlichen› Proportionen, die *alogoi logoi*, wieder endliche Benennungen, nämlich durch die Beschreibungen der geregelten Konstruktionen der verglichenen Größen. Auch wenn also Eudoxos' Proportionen keine Zn. im heutigen Sinne sind, sind sie doch selbständige ↑Gegenstände (der Rede) i.S. von Frege und Quine, die diese Kategorie an das Identitätskriterium («there is no entity without identity»)[38] binden. Vor diesem Hintergrund ist auch die Ersetzung der infinitesimalen Größen durch die Limestechniken nicht als *horror infiniti*, sondern als Vermeidung von mit unklaren Gleichheitskriterien verbundenen Pseudogegenständen zu verstehen. Mit dem Limes einer durch einen (endlichen) Ausdruck gegebenen (unendlichen) Folge kann man dagegen problemlos operieren und zu Zn. in dem verallgemeinerten pythagoreischen Sinne übergehen. Die so aufgefassten Zn. umfassen dabei nicht nur den euklidischen Bereich der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zn., bzw. der cartesischen Zn., die als Wurzeln rationaler Polynome (also algebraisch) darstellbar sind, sondern auch die transzendenten (nicht-algebraischen) Zn. wie die Eulersche Z. e oder die Kreis-Z. π. Diese allmähliche Erweiterung des Z.begriffs versuchten Cantor und Dedekind ein für allemal zu beenden, indem sie die Begriffe einer Funktion und Menge maximal *liberalisieren*, also von jeder konkreten definierenden Vorschrift oder Eigenschaft abtrennen. Demzufolge lässt sich Cantors Argument für die Überabzählbarkeit des Kontinuums als Beweis für die Existenz unbenennbarer (= unerkennbarer) Zn. interpretieren. Offen bleibt, ob das notwendigerweise zu einem naiven mathematischen *Platonismus* führt. Die Kritiker der Mengenlehre[39] weisen darauf hin, dass diese großzügige Begriffsbildung immerhin auch eine neue Art der Unbestimmtheit in die Mathematik bringt. Ihr zufolge werden insbesondere auch grundlegende Fragen der Mengenlehre, wie z. B. die Kontinuumshypothese oder V=L, unentscheidbar.

Im bewussten Gegensatz zum ↑Physikalismus (Mill), Platonismus (Cantor) und ↑Psychologismus (Husserl) hat Frege[40] seine Grundlegung der Arithmetik mit dem ‹Axiom› verbunden, «nach der ↑Bedeutung der Wörter muss man im Satzzusammenhange zu fragen», um festzustellen, dass eine (An)zahl nicht Aggregaten von Dingen zukommt, sondern als Antwort auf die Frage «Wie viel *P*?» bei einem (sortalen) ↑Begriff *P* zu verstehen ist. Die Zn. definiert Frege im Satzkontext und damit gemäß dem *Prinzip Humes*, in dem die

Gleichheit zweier Anzahlen NxFx und NxGx durch die bijektive Zuordnung der unter die Begriffe F, G fallenden Gegenstände festgesetzt wird. Zugleich versucht Frege dieses *implizite Abstraktionsverfahren* (↑Abstraktion) durch seine *explizite* Variante zu ersetzten, welche die zu definierenden Gegenstände mit den zugehörigen Äquivalenzklassen identifiziert, so dass z.B. die Anzahl als Menge aller gleichzahligen Begriffe (Mengen) aufgefasst wird. Da der Mengenbegriff dabei unerklärt oder primitiv in Cantors Sinne bleibt, versucht ihn Frege nachträglich im Rahmen des *Grundgesetzes V* „{x,Fx}={x,Gx} gdw ∀x(Fx↔Gx)" zu begründen, was dann aber zu *Russells Antinomie* führte.

Im *Neologizismus* (C. Wright, B. Hale) und *Neofregeanismus* (G. Boolos, Heck Jr.) hat man zwar die Konsistenz eines wesentlichen Teil des Fregeschen Systems demonstriert, die nachfolgende modelltheoretische Rekonstruktion des Z.begriffs verfehlt aber vollständig Freges programmatisches Streben nach dem Verständnis mathematischer Rede. Denn hier muss man längst schon mit dem Begriff einer Menge als einem primitiven Begriff arbeiten. Aus ähnlichen Gründen ist die *Non-Standard-Analysis* Robinsons, in welcher man ein nicht-archimedisches Modell der axiomatischen Analysis erster Stufe konstruiert, nicht als eine direkte Rekonstruktion der infinitesimalen Methoden von Leibniz zu deuten.

3.2 Philosophie der Zahl im 20. und 21. Jh.

Da eine selbstbewusste Philosophie der Arithmetik (↑Philosophie der Mathematik) und damit auch der Z. erst mit Freges *Grundlagen der Arithmetik* beginnt, stehen bis heute Freges Untersuchungen und sein Logizismus im Zentrum intensiver Studien. Infolgedessen wird i.d.R. nur der Begriff der natürlichen Z. diskutiert[41], da weder bei Frege noch bei irgendeinem seiner Nachfolger eine vergleichbar klare Begründung für die mathematische Analysis zu finden ist. Aus denselben Gründen finden die modernen Diskussionen überwiegend im weiteren Rahmen der ↑analytischen Philosophie und der modernen Logik statt, wohingegen die phänomenologischen Ansätze[42] vorwiegend mit Brouwers und Husserls (leicht psychologistischer) Deutung von Kants Philosophie der Mathematik verbunden sind.

Neben den sprachanalytischen Ansätzen Freges und den phänomenologischen Beiträgen Brouwers sind für die Philosophie der Mathematik des 20. Jh. besonders die pragmatischen Motive bezeichnend, die man als Erbe von Wittgensteins Radikalisierung der Fregeschen *Wende zur Sprache* (*linguistic turn*) deuten kann: Nach der Bedeutung der Wörter kann man nur im Zusammenhang eines *angewandten* Satzes fragen. In seiner Auseinandersetzung mit der logizistischen Mathematik, welche das kalkulatorische Element der Arithmetik unterschätzt, erklärt Wittgenstein schon im *Tractatus*, dass die Zn. keine Gegenstände (der Welt) seien, die im Bereich von Objektvariablen liegen, sondern als Indizes von Operationen zu deuten seien. Für seine spätere Philos. sind die (unter dem Einfluss von Brouwer entstandenen) Überlegungen über das Regelfolgen, die die Arithmetik als eines von vielen möglichen ↑Sprachspielen (‹ein Tun›) ansehen, charakteristisch. Lorenzen[43] hat operative (Dingler, Wittgenstein) und formalistische Ansätze (Hilbert, Curry) in einer Arithmetik als Lehre vom Operieren nach gewissen Kalkülen (schematischen Regeln) ausgearbeitet. Insgesamt sind diese pragmatischen Zugänge nicht etwa (bloß) durch die prädikative Stratifizierung des Mengen- und Z.begriffs, die z.B. auch in dem Konzept der iterativen Hierarchie als Standardmodell von Zermelos Axiomen vorkommt, sondern durch die Ablehnung der reduktionistischen Ansätze zu Gunsten der Zn. als Produkte einer synthetischen Definition, d.h. als Werte einer Eigenvariablen charakterisiert. Z. wird damit zu einer einfachen Kategorie.[44]

Vor diesem Hintergrund scheint die heute besonders in der anglo-amerik. Diskussion vorherrschende Wiederbelebung des Strukturalismus (Hellman, Resnik, Shapiro) als Mischung von Hilberts Formalismus und Dedekinds Platonismus begründungstheoretisch einen Rückschritt zu bedeuten. Auch der moderne Konstruktivismus, der neben den Beiträgen der niederländischen Schule (Beth, van Dalen, Troelstra) durch Kreisel, Feferman und Dummett repräsentiert wird, beschränkt sich oft nur auf die technischen Fragen, welche die konstruktive Mathematik zu einem Spezialfall der klassischen Mathematik machen. Sonst spielt sich die heutige Diskussion besonders im Kontext erkenntnistheoretischer Themen eines ↑‹Realismus› (Gödel), ↑‹Nominalismus (Field, Chihara) und ↑‹Naturalismus (Quine, Maddy) ab, ohne dass immer ganz klar wäre, worum es in diesem Positionsstreit sachlich eigentlich noch geht.[45]

Aristoteles, 1995, Philos. Schr. in 6 Bde., übers. v. E. Rolfes, Fft/M. – Becker, O., 1927, Mathematische Existenz, Halle. – Becker, O. 1933, Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid. In: Quellen u. Stud. z. Gesch. d. Mathematik, Astronomie u. Physik, Stud. 2. – Becker, O., 1954, Die Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg. – Boolos, G., 1998, Logic, Logic, and Logic, Cambridge, MA. – Brouwer, L.E.J., 1975, Collected Works I, hg. v. A. Heyting, Amsterdam. – Cantor, G., 1932, GAA mathematischen und philos. Inhalts, hg. v. E. Zermelo, Berlin. – Chihara, C., 1990, Constructibility and Mathematical Existence, Oxford. – Dedekind, R., 1872, Stetigkeit und irrationale Zn., Braunschweig. – Dedekind, R., 1888, Was sind und was sollen die Zn., Braunschweig. – Deiser, O., 2004, Einf. in die Mengenlehre, Berlin. – Deiser, O., 2007, Reelle Zn., Berlin. – Dummett, M., 1977, Elements of Intuitionism, Oxford. – Ebbinghaus, H.-D., ^{2}1988, Zn., Berlin. – Euklid, 1933-37, Elemente, hg. u. übers. v. C. Thaer, Leipzig. – Field, H., 1980, Science without Numbers, Princeton. – Fowler, D., 1987, The Mathematics of Plato's Academy, Oxford. – Frege, G., 1879, Begriffsschrift, Nebert. – Frege, G., 1884, Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau. – Frege, G., 1893/1903, Grundgesetze der Arithmetik, Jena. – Gericke, H., 2004, Mathematik in Antike, Orient und Abendland, Wiesbaden. – Hellman, G., 1989, Mathematics without Numbers, Oxford. – Heyting, A., 1956, Intuitionism, Amsterdam. – Hilbert, D., 1900, Über den Z.begriff. In: Jahresbericht d. Dt. Math. Vereinigung, 8. – Hilbert, D., 1926, Über das Unendliche. In: Math. Annalen, 78. – Jahnke, H.N. (Hg.), 1999, Gesch. der Analysis, Heidelberg. – Kolman, V., 2005, Lässt sich der Logizismus retten? In: Allgem. Zschr. f. Philos., 30. – Kolman, V., 2008, Der Z.begriff und seine Logik. Die Entwicklung einer Begründung d. Arithmetik bei Frege, Gödel u. Lorenzen. In: Logical Analysis and the History of Philos., Bd. 11. – Lorenzen, P., 1955, Einf. in die operative Logik und Mathematik, Berlin et al. – Lorenzen, P., 1962, Gleichheit und Abstraktion. In: Ratio, 4. – Platon, 1981, WW in 8. Bde., griech. u. dt., hg. v. G. Eigler, Darmstadt. – Maddy, P., Realism in Mathematics, Oxford. – Potter, M., 2000, Reason's Nearest Kin, Oxford. – Quine, W.V.O. 1960, Word and Object, Cambridge, MA. – Quine, W. V. O., 1963, Set Theory and its Logic, Cambridge, MA. – Quine, W. V. O., 1981, Theories and Things, Cambridge, MA. – Rautenberg, W., 2007, Messen und Zählen. Eine einfache Konstruktion d. reellen Zn., Lemgo. – Resnik, M, 1980, Mathematics as Science of Patterns, Oxford. – Robinson, A., 1974, Non-Standard Analysis, Amsterdam. – Russell, B., 1908, Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. In: American J. of Mathematics, 30. – Shapiro, S., 1997, Philos. of Mathematics. Structure and Ontology, New York. – Shapiro, S. (Hg.), 2005, The Oxford Handbook of Philos. of Mathematics and Logic, Oxford. – Stekeler-Weithofer, P., 1992, Plato and the Method of Science. In: History of Philos. Quartlerly, 9. – Stekeler-Weithofer, P., 2008, Formen der Anschauung, Berlin. – Thiel, C., 1995, Philos. und Mathematik, Darmstadt. – Stern, H., 1990, Eudoxos and Dedekind: On the Ancient Greek Theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics. In: Synthese, 84. – Tieszen, R. L., 2005, Phenomenology, Logic, and the Philos. of Mathematics, Cambridge. – Troelstra, A.S./D. van Dalen, 1988, Constructivism in Mathematics, 2 Bde., Amsterdam. – van Atten, M., 2006, Brouwer meets Husserl. On the Phenomenology of Choice Sequences, Dordrecht. – Weyl, H., 1918, Kontinuum, Leipzig. – Wittgenstein, L., 1984, Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Fft/M. – Wright, C., 1983, Frege's Conception of Numbers as Objects, Aberdeen. – Zeuthen, H. G., 1910, Sur la constitution des livres arithmétiques des Ěléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité. In: Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinge, 5.

[1] Frege 1893/1903, 2. Bd., § 157. – [2] Vgl. Ebbinghaus 1988. – [3] Elemente VII, Def. 2. – [4] Cantor 1932, 379 bzw. 282. – [5] Aristoteles, Met., 1020a. – [6] Met., 1088a, 1016b. – [7] Met., 1016a-b. – [8] Aristoteles, Physik, 232b. – [9] Aristoteles, Kategorien, 4b. – [10] Met., 986a – [11] Zeuthen 1910. Siehe auch Becker 1933, Becker 1954 und Fowler 1987. – [12] Vgl. Deiser 2007, 28ff. – [13] Elemente, X, 2, 3. – [14] Elemente, V, Def. 4 – [15] Vgl. Jahnke 1999, 13ff. – [16] Stekeler-Weithofer 1992, 370. – [17] Elemente VIII, 5. – [18] Vgl. Stern 1990. – [19] Elemente, V, Def. 5. – [20] Vgl. Politeia, 525e. – [21] Vgl. Gericke 2004, 2. Tl., 296. – [22] Vgl. Jahnke 1999. – [23] Cantor 1932, 92 ff. – [24] Dedekind 1872. – [25] Physik, 206a ff. – [26] KrV, B 210 f. – [27] Cantor 1932, 147 ff. – [28] Hilbert 1926. – [29] Vgl. Frege 1879, IV. – [30] Vgl. Frege 1884, §§ 91, 6, sowie Kolman 2005. – [31] Frege 1893/1903. – [32] Dedekind 1888. – [33] Dedekind, § 66. – [34] Hilbert 1900. – [35] Vgl. Trolestra/van Dalen 1988. – [36] Met., 987b – [37] Met., 1043b – [38] Quine 1981, 102. Vgl. auch Frege 1884, § 62ff., und Lorenzen 1962. – [39] Weyl 1918 und Wittgenstein 1984. – [40] Frege 1884, XI, § 106. – [41] Vgl. z.B. Potter 2000. – [42] Vgl. z.B. Becker 1927, Tieszen 2005, von Atten 2006. – [43] Lorenzen 1955. – [44] Vgl. Kolman 2008. – [45] Vgl. Shapiro 2005.

Vojtech Kolman