7 Řídit se pravidlem

I když lze Russellův paradox alespoň pomocně označit za podnět, jenž vedl k revizi matematiky pěstované na logicko-množinových principech, zůstává stále pochybnost o tom, zda se nejednalo pouze o projev nepřímý, jakýsi znak hlubšího omylu, jenž vyrostl z přebujelé abstrakce užitých pojmů a důkazových forem, tj. ze ztráty kontaktu s vlastní matematickou praxí. Kdyby tomu tak bylo, mohla by být totiž za podstatně významnější symptom změny označena vášnivá polemika následující po Zermelově důkazu věty o dobrém uspořádání, a to pro akcentování fiktivnosti postulátu o výběrové funkci, který byl sice zcela v souladu s Cantorovým liberalizovaným pojmem množiny, odporoval ale obvyklé představě výběru jakožto aktu podle jasně daného *pravidla*. Postulování existence příslušné výběrové funkce speciálním axiomem ale na druhou stranu potřebu takovéhoto pravidla nepřímo přiznává, kritiku axiomu lze tedy číst i jako napadení klasické představy o možnosti tvrzení existence objektu bez bližší specifikace toho, o který objekt se jedná.

Francouzští konstruktivisté, Borel, Lebesgue a Baire, požadovali, aby bylo za existující považované pouze to, co je definovatelné konečně mnoha slovy. V souladu s tím např. Borel [1914, s. 175] popírá, že by postačujícím kritériem existence byla konzistence, jak si to kromě raného Hilberta myslel i konstruktivisticky naladěný Poincaré (viz oddíl 5.8). Hilbertův pozdější finitistický program, se svojí redukcí ideálních tvrzení o nekonečných objektech na výroky o objektech konečných, je ale *de facto* pokračováním obdobného projektu Kroneckerova, zbaveného zbytečného radikalismu: Kronecker chtěl uznávat pouze objekty zkonstruovatelné v konečně mnoha krocích, v důsledku čehož odmítal všechna transcendentní (reálná) čísla, o Cantorových transfinitních číslech nemluvě.[1] Francouzští konstruktivisté tento postoj kultivovali, po-

[1] Podle některých názorů, reprodukovaných např. in Hesseling [2003, s. 6 n], ovšem Kronecker nepředpokládal, že by šlo pěstovat analýzu bez iracionálních čísel, jenom je, na rozdíl od čísel racionálních, považoval za pouhé symboly. Těžko říci, jaký je mezi tím rozdíl.

žadujíce, aby konečné bylo pouze definující pravidlo, jako je tomu třeba u rozvoje čísel $\sqrt{2}$ a π.

Z toho všeho je vidět, že v oblasti základů neexistovala žádná jednotná opozice vůči převládajícím trendům a že principy, s nimiž šel Brouwer a jiní do boje proti platonistickým principům Cantora a Frega, akceptovali někteří Brouwerovi oponenti a Fregovi pokračovatelé, jako třeba Hilbert, v mnohem větší a rigoróznější míře. A naopak, že mnozí kritici svévole Cantorových definicí a Fregových jazykových konvencí skončili v pozicích tak svévolných, že je byl jen málokdo schopen následovat.

Brouwerův případ je přitom o to zajímavější, že důraz na *konstrukci* jakožto primární projev matematické aktivity kombinuje s jejím totálním *rozvolněním*, kdy se volba dalších členů konstruované posloupnosti stává závislá na nepředvídatelném rozhodnutí tvůrčího subjektu (ideálního matematika). Tím se na jednu stranu přibližuje Cantorově liberální koncepci, na druhou stranu ji novátorsky upravuje vlastními 'intuitivními' principy, jejichž výsledkem je kontinuum radikálně odlišné od toho, na co si matematický svět zvyknul od Weierstrasse, a co se, alespoň formulací, zdá shodovat s antickou koncepcí Aristotelovou. Významný je zde také rozchod s logikou.

7.1 Nespolehlivost logických principů

V této kapitole bych chtěl zužitkovat Brouwerovy podněty k filosofii matematiky stejně, jak to kdysi učinil Wittgenstein, když ho Brouwerova vídeňská přednáška 'probudila z dogmatického spánku' a uvedla do druhé části jeho filosofických aktivit, jíž dominuje právě problém pravidla a řízení se jím.[2] Prvním a nejvýznamnějším podnětem nám bude Brouwerova teze, že

> matematika je více činností nežli teorií,[3]

která otevřela kapitolu snah o pragmatické základy matematiky a logiky, později vyvrcholivší v operativním a dialogickém projektu Lorenzenově. Dalším podnětem je nám zde Brouwerova odvážná změna pravidel hry

[2] Přednáška se konala roku 1928 a Wittgenstein, jenž předtím přestal být filosoficky činný, na ni byl pozván z podnětu členů vídeňského kroužku. Ti také (viz van Dalen [2005, s. 564]) zaznamenali jeho bezprostřední reakce. Podle Karla Mengera: "Wittgenstein, nehybný od počátku do konce, pozoroval nejprve přednášejícího s lehce udiveným výrazem, jenž později přešel ve slabý úsměv uspokojení." Po přednášce, podle Herberta Feigla: "Wittgenstein začal být extrémně výřečný a načrtával myšlenky, které byly začátkem jeho pozdějších spisů. Ten večer znamenal jeho návrat k filosofii." Jak moc Brouwer Wittgensteina skutečně ovlivnil, zůstává nejasné. Podle Brouwerova sdělení z roku 1953 (viz van Dalen [2005, s. 566]) se měli s Wittgensteinem potkat na nějakém ostrově a diskutovat celý den právě onu vídeňskou přednášku.

[3] Toto je poněkud působivější Weylova [1921, s. 157] parafráze textu Brouwerovy disertace [1907, s. 61], kterou později přejímá i Wittgenstein.

s ustanovenými pojmy, balancující sice na hraně srozumitelnosti, zároveň však poukazující na jejich konvenčnost a volitelnost, samozřejmě potud, je-li chápána jako další z alternativ, nikoli jediné — intuitivní — řešení. Brouwerův důkaz spojitosti každé totální funkce na kontinuu hraje v našem výkladu stejnou roli, jakou hrál v dřívějších kapitolách Bolzanův důkaz věty o mezihodnotě a Dedekindův rekurzivní teorém.

Třetí podnět je *negativní* a týká se samotného pojmu pravidla jako něčeho, čím se musíme být schopni řídit, resp. následovat to, jak zní nelibý, ale instruktivní překlad německého "Regelfolgen" či anglického "rule-following". Brouwerův pojem svobodné volby (*free choice*) není totiž v tomto ohledu příliš odlišný od Cantorovy představy preexistujícího celku *libovolných* posloupností, neboť jsou oba mimo intersubjektivní, tj. jazykovou kontrolu. To se významně týká i samotného pojmu 'pojmu', jenž je v kantovské filosofii vázán na osvojení si konkrétního pravidla aplikace, nikoli na (pasivní) nahlédnutí ideje, participaci na ní, lhostejno zda v hyperobjektivní říši platónských idejí, jak se to děje např. při výuce otroka v *Menónovi*, či subjektivitě naší mysli.

Z druhé strany podotkneme, že je zcela nemístné vyčerpat pojem pravdivosti efektivním konceptem důkazu (konstrukcí), neboť tak přehlížíme fakt vět, které nejsou pravdivé aktuálně, ale v principu, tj. jejichž pravdivost může být ještě prokázána. K tomu je třeba akceptovat velkorysejší pojetí pravidla (pravdivostních podmínek), jež sice umožňuje ohodnotit systém vět jednoznačně, leč ne efektivně. Tak je tomu u (klasické) elementární aritmetiky. V důsledku toho jsme s to zavést rozdíl mezi skutečností a fikcí, ohlášený v minulé kapitole, i v rámci abstraktních disciplín, jako je matematika (aritmetika vs. teorie množin), a zavřít tak dveře radikálnímu realismu Cantorovu na straně jedné a radikálnímu idealismu Brouwerovy školy na straně druhé.

Všechny hlavní body Brouwerovy vzpoury proti tehdejší situaci v základech matematiky jsou v principu obsaženy již v jeho disertaci, obhájené pod názvem *Over de grondslagen der wiskunde* (*O základech matematiky*) [1907]. V osobitém, obtížně srozumitelném stylu s mystickým přídechem, manifestovaným zvláště silně v eseji *Leven, Kunst en Mystiek* (*Život, umění a mystika*) [1905], nechává Brouwer matematiku vyvstat z původní intuice (*Urintuition*, *basal intuition*), která je pro něj identická s mentálně interpretovaným Kantovým názorem času. Názor prostoru byl podle Brouwera [1912, s. 85] právě v tomto subjektivním duchu vyvrácen možností neeukleidovských geometrií a jejich aplikací na svět. Obecně dokonce platí [1907, s. 61], že

> jediný apriorní prvek vědy je čas.

Jelikož "konstrukce intuitivní matematiky o sobě je čin, nikoli věda", je matematika primárně nezávislá na jazyku, a tedy i na logice. Jazyk k ní, říká Brouwer [1912, s. 86], přistupuje až dodatečně, jako "nematematický prostředek, jak pomoci matematické paměti či umožnit různým osobám vytvoření" téhož objektu. Matematika tedy [1907, s. 72 nn] nejenže není na logice závislá, ale naopak, logika je odpozorována z popisu matematického jednání v jazyce (jenž sám není matematikou) jako souhrn jistých pravidelností, které se v něm vyskytují. Problém logicismu, k jehož představitelům Brouwer počítá vedle Russella i Cantora a Hilberta, spočívá v obrácení přirozeného sledu věcí, totiž v aplikaci nedokonalé jazykové struktury na prvotní matematickou intuici. Konzistence jako kritérium existence matematického systému je nejmarkantnějším projevem tohoto obratu. Zde se Brouwerova [1907, s. 76] kritika Hilbertova a Dedekindova axiomatismu pozoruhodně kryje s kritikou Fregovou, jak jsme ji vylíčili v oddílu 5.2. Brouwer jde ale mnohem dál.

O rok později, v článku *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (*Nespolehlivost logických principů*) [1908, s. 109], Brouwer rozvíjí jednu z tezí své disertace a za zvláště nespolehlivou jazykovou transformaci označuje zákon vyloučeného třetího jako úsudkový princip, v němž se od nepravdivosti non-A přechází k pravdivosti A. Ne všechny logické zákony si vysloužily tento verdikt. Klasický sylogismus např. údajně kopíruje skutečnou mentální konstrukci, a je tedy matematickou tautologií. Podobně zákon sporu. Vyloučený třetí je ale podle Brouwera jako pravidelnost vysledován pouze na konečných totalitách, jeho aplikace na totality nekonečné je neoprávněná a může vést nejen k nezdůvodněným tvrzením, ale i k paradoxům a vyloženým nepravdám. Brouwer [1908, s. 108] říká:

> Všechny paradoxy zmizí, jestliže se omezíme na ty systémy, které mohou být vystavěny explicitně ze základní intuice, jinými slovy, když chápeme matematiku jako předpoklad logiky, nikoli naopak.

Jako řešení situace základů je toto tvrzení samozřejmě pochybné, tj. buď je nepravdivé, nebo je to truismus, který nelze vyvrátit žádným pozorováním, a to právě pro nejasný status oné 'základní intuice'. Brouwer [1912, s. 85] ji považuje za charakteristický znak své koncepce matematiky, kterou nazývá neointuicionismem, a to jak v odlišení od Kantovy filosofie, tak od pre- či polo-intuicionistů, jako byli Kronecker a zmínění francouzští matematici,[4] pro něž byla matematickou konstrukcí především konstrukce symbolická, tj. veřejná, opírající se o manipulaci s konečnými objekty jazyka. Z této tradice vyrůstá i tradice konstruktivismu Weylova a pozdní finitismus Hilbertův. Brouwerovo východisko je tedy od počátku jiné, a tudíž obtížně zařaditelné, tím spíše, že se systematicky snaží o to, aby nikam zařaditelné nebylo. V tom je možné vidět další afinitu Brouwerovy filosofie s filosofií Wittgensteinovou.

[4] Název "halbintuitionistisch" pochází od Heytinga [1934].

Brouwer obviňuje Hilbertův axiomatismus z toho, že není schopen zajistit ideální stav okamžitého potvrzení či vyvrácení libovolného tvrzení matematiky, ačkoli to na metaúrovni vyžaduje jím akceptovaný klasický princip vyloučeného třetího. Kdyby toho totiž schopen byl, neexistovala by dosud nerozhodnutá tvrzení jako např. GOLDBACHOVA DOMNĚNKA, u níž ani po stovkách let od doby, kdy byla Christianem Goldbachem formulována, není známo, zda je, jak tvrdí, každé sudé číslo > 2 součtem dvou prvočísel, či nikoli.[5] Pro konkrétní číslo nám přitom nečiní problém příslušné tvrzení (efektivně, tj. v konečně mnoha krocích) ověřit, vše proto vychází z faktu, že je čísel nekonečně mnoho, a že tedy z toho, že jsme při průchodu jejich řadou zatím nenarazili na protipříklad, neplyne, že takový protipříklad neexistuje, neboli: z dosavadního neúspěchu non-A nelze usoudit na A. Toto je jedna část Brouwerova argumentu proti spolehlivosti vyloučeného třetího, kterou lze formulovat také jako skepsi ohledně tvrzení, že lze každou matematickou větu dokázat či vyvrátit.

Hilbert je zde přitom přímým a zmíněným terčem již proto, že tuto tezi explicitně formuloval jako 'axiom' ve své pařížské přednášce o dosud nevyřešených, aktuálních problémech matematiky. Z textu [1900*b*, s. 298] je nicméně patrno, že tím ani náhodou nemyslel cosi jako popisný metavýrok, věštbu či metafyzické tvrzení, ale spíše vyjádření regulativní ideje každého vědeckého bádání:

> Toto přesvědčení o řešitelnosti jednoho každého matematického problému je mohutný podnět naší práce; uvnitř neustále slyšíme volání: *Tady je problém, hledej řešení. Můžeš na něj přijít čistě rozumem, neboť v matematice neexistuje žádné ignorabimus.*

Jako výraz optimistického přesvědčení o poznatelnosti světa je takový výrok plně v pořádku, připojme k němu ale následující komentář, který nám poslouží i jako vodítko v dalším výkladu.

(1) To, že se většinu dosud formulovaných matematických tvrzení podařilo zodpovědět (kvadratura kruhu, Fermatova věta atd.), nezakládá samozřejmě platnost věty, že se podaří vyřešit každý problém. Okolnost, že se o takové řešení snažíme, ale předpokládá, že má příslušný problém, resp. s ním spjaté tvrzení, smysl, neboli: že byly dostatečně jasně formulovány podmínky, za nichž bude platit či platí, a za nichž nikoli, a my tedy rozpoznáme příslušný důkaz jako důkaz pravdivého tvrzení a příslušné vyvrácení jako důkaz jeho negace. Stav, kdy námi užívané věty mají smysl, i když si nejsme jisti jejich skutečnou pravdivostní hodnotou, je běžně znám z všedního života, specificky např. z tvrzení historických

[5] Goldbachova domněnka byla formulována roku 1742. Vinogradov dokázal v minulém století její tzv. slabou variantu, podle níž je dostatečně velké liché číslo součtem tří prvočísel. Onu dostatečnou velikost specifikoval jeho student Borodzin jako $3^{14348907}$.

("Mozart byl otráven" či Bolzanova 'věta o sobě': "na tom a tom stromě bylo v tom a tom roce tolik a tolik listí"), u nichž je zpravidla jen nepatrná šance, že budou dokázána či vyvrácena. Podstatné ale je, že víme, jak posuzovat případná svědectví v jejich prospěch či neprospěch. Chtít naprostou jistotu typu Descartova [1637*a*] "myslím, tedy jsem" či Moorova [1925] "vím, že toto je má ruka" je neopodstatněným mícháním problémů pravdivosti (logického či epistemologického) a jistoty (psychologického), které spolu nemají mnoho společného právě proto, že věci, kterými jsme si jisti, nemusí být pravdivé a *vice versa*. Něco k tomu řekneme ještě v oddíle 8.2.

(2) Z bodu (1) plyne, že od počátku systematicky rozlišujeme mezi dosud nepoznanou, leč v principu poznatelnou pravdou nějaké věty a důkazem jakožto konkrétním svědectvím toho, jak se věci touto větou popsané mají. Tyto dvě složky poznání se zdá Brouwer od počátku slučovat, tj. pravdivost věty ztotožňuje s (mentální) konstrukcí, která tuto pravdivost dosvědčuje. Ona konstrukce navíc musí být nějakým způsobem aktuální, což znamená, že např. Fermatova věta nebyla před rokem 1993 ani pravdivá, ani nepravdivá. To se nezdá být obecně únosné, stejně jako Wittgensteinovo [1983, s. 200, § 166] ztotožnění pravdivosti s verifikací, které lze vysledovat již v *Tractatu*, explicitně vyjádřeno je ale až ve výrocích jako:

> Verifikace není *nějakým* příznakem pravdy, nýbrž *konkrétním* smyslem věty.

Tomu lze samozřejmě rozumět více způsoby. Typicky lze aktuální verifikaci nahradit pojmem principiální verifikovatelnosti, čímž se přiblížíme naší pozici vyjádřené v bodě (1).

(3) Na druhou stranu, v Hilbertově seznamu matematických problémů, dokonce v jejich čele, figurují tak kontroverzní tvrzení, jako je hypotéza kontinua, u nichž není jasné, zda artikulují byť jen principiálně řešitelný problém. Vnucuje se nám pak stará otázka, zda jsme do celé věci dali tolik, abychom byli s to takové problémy vůbec rozhodnout, tj. zda není celý problém nejen efektivně, ale i pojmově nedourčen. Brouwerův požadavek jiných nežli čistě konvenčních, jazykových kritérii se na tomto pozadí zdá být zcela oprávněný. Věc se ale dále komplikuje.

(4) Hilbert i Brouwer si byli oba vědomi toho, že platonistův předpoklad, že se věci nějak mají, i když je našimi lidskými silami nejsme s to byť jen hypoteticky dokázat, není odpovědí na otázku, zda je hypotéza kontinua v principu pravdivá či nepravdivá. První z nich se proto pokusil převést záležitost existence ideálních matematických předmětů, jako jsou Cantorovy vyšší mohutnosti, na otázku konzistence příslušné (Zermelovy) axiomatizace. Brouwer nepovažoval axiomatizaci za řešení. Ke zdůvodnění existence matematického objektu či pravdivosti matematického tvrzení podle něho nestačí jazyková konstrukce (axiomatický sys-

tém, deduktivní odvození), ale konstrukce založená na primární intuici. Tato intuice je pak značně velkorysá, zajišťuje např. existenci všem spočetným ordinálům, včetně transfinitních, a kontinuu; viz Brouwer [1907, s. 83]. Podle (pozdního) Hilberta naopak nekonečno ve světě neexistuje, a vše, co máme, jsou jenom konečné posloupnosti symbolů a náš specifický způsob práce s nimi; viz oddíl 8.2. To je zcela v duchu jiného Wittgensteinova [1983, s. 26, § 135] tvrzení, totiž:

> "Nekonečno známe pouze z popisu." Pak tedy existuje pouze tento popis, a nic jiného.

Tato teze je projevem transcendentálně-analytického pohledu na svět, jehož zpochybnění je nemožné právě proto, že je lze opět vést pouze (v konečném) jazyce. Znovu je ale zapotřebí jisté opatrnosti.

(5) Brouwer má pravdu v tom, že některé tradiční matematické postupy pojmově předcházejí postupům logické matematiky, jak jsme to podrobně sledovali v kapitole 5. Jde především o konstrukci číselné řady a na ní založený důkaz indukcí. Tyto postupy se ale nezdají být nezávislé na jazyku, ba naopak, vedou v první řadě k produkci jazykových artefaktů, číslovek 1, 2, 3, ..., z nichž lze teprve sekundárně, logickou (tj. jazykově-závislou) abstrakcí, získat čísla. Čísla a číslovky samotné samozřejmě neexistují aktuálně, přinejmenším ne od jisté meze, o mentálních objektech to ale platí dvojnásob, ve smyslu, jejž jasně popsal Frege [1918*a*, s. 65]. Parafrázuji: Mentální stavy, představy, jsou něco, co jistý člověk *má*, co ale právě proto nemůže sdílet s jinými. Obsah, význam našich slov je oproti tomu veřejným statkem, totiž výsledkem stanovení kritérií identity, znovurozpoznání, na jejichž základě považujeme jistá slova za reprezentanty téhož obsahu, a tento následně za (objektivně) existující. Pro představu, kterou mám já a kterou máš ty, je něco takového zhola nemožné, nejedná-li se o typ, intersubjektivně manifestovatelný kresbou či zvukem. Tím je ale pořadí soukromého a veřejného obráceno ve prospěch druhého z nich. K ujasnění se může hodit následující Davidsonův citát:

> Empiristé [...] se domnívají, že člověk nejprve ví, co je v jeho vlastní mysli, pak, má-li štěstí, co je ve vnějším světě, a pak, má-li ještě větší štěstí, zjistí, co je v mysli někoho jiného. Já to vidím jinak. Nejprve zjistíme, co je v mysli někoho jiného, a tím máme i vše ostatní.[6]

(6) Jelikož je posloupnost číslovek dobře popsána, stačí k zavedení čísel ve Fregově objektivním, resp. jazykově-intersubjektivním duchu doplnit obor přípustných výrokových forem a jejich ohodnocení v souladu s Fregovými sémantickými principy. Konkrétně to znamená, že

[6] Citováno podle Borradori [1994, s. 50].

(I) třídu T_{N} substituovatelných termů tvoří (i) báze elementárních termů 1, 2, 3, ... a (ii) komplexní termy získané induktivním krokem: jsou-li M, N termy, pak i $(M + N)$ a $(M \times N)$,

(II) třídu S_{N} vět tvoří (i) induktivní báze E všech elementárních vět $M = N$ a $M < N$ pro libovolné $M, N \in T_{\mathsf{N}}$ a (ii) třída K komplexních vět získaná aplikací operátorů PL.

Z tohoto materiálu lze již snadno vyrobit to, čemu říkáme model (formální) aritmetiky neboli model $\mathsf{N} = \langle T_{\mathsf{N}}, S_{\mathsf{N}} \rangle$ standardní, uvážíme-li, že jednoznačné pravdivostní ohodnocení báze E je zajištěno již čistě mechanicky, transformačními algoritmy osvojenými na základní škole, a induktivní krok pak garantuje Tarského definice, rozšiřující platnost pravdivostního principu z elementárních vět na věty komplexní. K celé věci se ještě vrátíme v příští kapitole v souvislosti s pragmatickými pokusy o založení aritmetiky.

(7) Brouwer a konstruktivisté obecně útočí pochopitelně na druhý krok tohoto argumentu, totiž představu, že je každému výrazu z S_{N} Tarského definicí přiřazena právě jedna pravdivostní hodnota, se speciálním důrazem na nekonečnost oboru T_{N} kvantifikace. My přitom víme, že je pravdivostní hodnota přiřazena každému prvku $A \in E$ báze, z čehož a obecně substitučního principu usoudíme, že je buďto pro každé $M \in T_{\mathsf{N}}$ věta $A(M)$ pravdivá, nebo existuje $N \in T_{\mathsf{N}}$ takové, že byla $A(N)$ přiřazena nepravda, *tertium non datur.* — Lorenzen [1987, s. 69] takováto ospravedlnění klasických pravdivostních podmínek odmítá s tím, že vlastně jen opakují na metaúrovni to, co mají na úrovni objektu obhájit, a točí se tedy v kruhu. To je ale omyl, stejně jako tvrzení, že jsou Tarského podmínky pravdivosti redundantní! Jak jsme již řekli, platí to pouze pro jejich elementární část:

"A" je pravdivá právě tehdy, když A,

kterou jsme ale nyní v bodě (II.i) nezávisle dovysvětlili, což znamená, že dostala formu skutečné definice:

"A" je pravdivá právě tehdy, když B.

V případě komplexních vět se může mít samozřejmě věc tak, že mají ony, resp. slova, která je spojují ($\wedge$, $\exists$), ještě nějaký externí, přirozený význam ('a', 'existuje'), resp. pravdivostní podmínky. To ale nevadí, neboť naše definice má za úkol tento význam, resp. podmínky normovat, což znamená, že *de facto* začínáme se sadou obsahuprázdných znaků, jimž přidělujeme významy podle námi zvolených pravidel. K žádnému významovému cyklu na úrovni metajazyka dojít nemůže, neboť na úrovni objektu ještě žádný význam není a externí význam užitých slov slouží až později k projekci logického systému na nějaký výsek přirozeného jazyka.

(8) Brouwerův či Lorenzenův radikalismus ohledně vyloučeného třetího, přinejmenším v rámci elementární aritmetiky, nesdílejí ani někteří konstruktivisticky naladění matematici, např. Weyl [1921, s. 156], který v opozici k Brouwerovi napsal:

> Ve svém vlastním pokusu o základy analýzy jsem přijal ten názor, že není důležité, zda jsme schopni rozhodnout nějakou otázku pomocí jistých prostředků, jako jsou inferenční mody formální logiky. Spíše je důležité, *jak se věci skutečně mají.* Podle mě jsou posloupnost přirozených čísel a jejich existence základem matematiky *takovým* způsobem, že je pro každou vlastnost E, která má v oboru čísel smysl, určeno, zda v ní existují čísla vlastnosti E či nikoli.

Podobný rozchod s Brouwerem vyhlásil později Markov, v jehož konstruktivním konceptu analýzy je akceptován tzv. MARKOVŮV PRINCIP. Podle tohoto principu plyne z toho, že není možné, aby daný algoritmus neterminoval, že terminuje, což je instancí intuicionisticky neplatného principu $\neg\neg A \rightarrow A$. Brouwer zde bude argumentovat známým selháním příslušné důkazové techniky, totiž že z nepřímého důkazu věty A, tj. odvození sporu z non-A, ještě neplyne přímý důkaz A. Podobné 'protipříklady' k Markovovu principu lze samozřejmě najít i v jiných efektivních kontextech, s nimiž jsme se dokonce seznámili, např. když z toho, že nám algoritmus pro daný vstup (množinu splnitelných formulí) dokazatelně nedá odpověď NE, nemůžeme usoudit, že nám dá odpověď ANO (množina formulí je splnitelná), protože problematika rozhodnutelnosti není jen otázkou objektivních faktů (strom má splnitelnou větev), ale i naší schopnosti tyto fakty ověřit. Podobné úvahy vedou k teorii algoritmů a otázkám vyčíslitelnosti, o nichž se v této kapitole také zmíníme.

(9) Weylem anticipovaný postoj, v němž rozlišujeme mezi námi danými pravdivostními podmínkami vět jistého kontextu na straně jedné a možnostmi jejich reálné kontroly na straně druhé, nazývá Stekeler-Weithofer [1992*b*] SÉMANTICKÝM PLATONISMEM, a to jak v opozici k platonismu ontologickému, podle něhož na nás pravdivost vět jazyka vůbec nezávisí, tak v opozici k radikálnímu konstruktivismu či mentalismu Brouwerově, v němž není pravdivosti mimo možnost okamžitého ověření. Nezdravé rysy poslední pozice lze ještě radikalizovat, když jako tzv. ultraintuicionismus popřeme existenci čísel, jako je $10^{10^{10}}$, třeba proto, že na světě není tolik křídy a nejspíš ani molekul, aby je šlo vůbec vyčíslit, natož si představit v naší mysli.[7] Podobně bychom ale mohli popírat existenci věcí, které právě nevidíme či které se jako zemská osa, NATO

[7] Prakticky jediného serióznějšího rozpracování se ultraintuicionismus, resp. ultrafinitismus dočkal v díle Alexandra Jesenina-Volpina, významného ruského disidenta, syna básníka Sergeje Jesenina. Ani on se však nedostal dále nežli k přípravné fázi.

či přátelství nikde v uvedeném silně empirickém smyslu nevyskytují, tj. nelze si na ně sáhnout. Ve vztahu k abstraktním předmětům matematiky, konkrétně přirozeným číslům, je podstatné právě to, že jsou skrze svoji definici potenciálně zvětšitelné, nemohou mít tedy největšího reprezentanta omezeného třeba stavem současného světa.

(10) Náš příklad (6) oboru elementární aritmetiky, který si v protikladu k analýze právě pro svoji 'uzavřenost' vynesl od Weyla, jeho současníků a následovatelů přízvisko "definitní", nám dává odpověď na Brouwerovu [1908] oprávněnou a velevýznamnou otázku, jakým právem se spoléháme na užití logických principů v oborech, jako je matematika nebo přírodní vědy, které v principu s jazykem nesouvisejí. Brouwer [1908, s. 109] se doslova ptá:

> Lze připustit, abychom v čistě matematických konstrukcích a transformacích na určitou dobu opustili ideu konstruovaného matematického systému a operovali v odpovídající struktuře jazykové, následujíce principy *sylogismu*, *sporu* a *vyloučeného třetího*, a mohli se spolehnout, že lze každou část argumentu ospravedlnit zpřítomněním si příslušné matematické konstrukce v mysli?

Opakují se tím vlastně staré námitky proti užití nepřímých (apagogických) metod 'sofistů' v názorné (epagogické) disciplíně, jako je matematika, jak se poprvé objevily v antice a jak byly později zobecněny Descartem, viz třeba [1637*a*, s. 18 n], [1701, s. 405 n], identifikujícím znak pravé vědecké metody s psychologickým kritériem 'jasného a zřetelného'.

Náš postoj by měl být v tuto chvíli zřejmý. Logická pravidla, jako vyloučený třetí, stejně jako čistě matematická pravidla, jako indukce, můžeme na obor N aplikovat právě proto, že byl s jejich pomocí normován, tj. vytvořen tak, aby platila. Nic nám samozřejmě nebrání tuto okolnost změnit, tj. vytvořit alternativní systém aritmetiky či analýzy, bude-li to jen trochu dávat nějaký praktický smysl. Brouwerova skepse, následovaná idiosynkratickým návrhem, nám právě pro jeho drasticky odlišnou povahu zvláště názorně ukázala, že je takováto alternativa možná, a nahradila tak v této pozitivní, dějinně-dialektické roli negativní platonismus Fregův, jenž postuluje existenci třetí říše významů pouze na základě postřehu, že nemohou být subjektivní. Frege sice věřil v možnost a nutnost (jazykové) specifikace apriorních principů našeho matematického poznání, stejně jako v ně věřil Kant v oblasti empirické, měl ale — nejspíš také podobně jako Kant — za to, že jsou nějak fixovány předem, tj. že nám nezbývá mnoho prostoru pro jejich změnu. Proto je dříve zmiňovaný pragmatický aspekt Fregova jazykového obratu ještě příliš slabý a v plném rozsahu může být připisován až Wittgensteinovi. Ten k němu ovšem dospěl vstřebáním Brouwerovy pojmové revoluce.

7.2 Zákon a volba

Nyní již můžeme pokročit v odpovědi na otázku po rozdílu fikce a skutečnosti v rámci abstraktních oborů, jako je matematika, nakousnutou v závěru předchozí kapitoly. Nejprve několik poznámek k rozšířenému zvyku označovat za fiktivní cokoli, co není empiricky vykazatelné v nějakém užším slova smyslu (nedá se to prodat nebo sníst). Ty plynou z obecnějšího postřehu, že na logicko-sémantické úrovni nemají pojmy jako “fiktivní”, “skutečný”, podobně jako “abstraktní” či “konkrétní”, charakter absolutních, ale jen relativních rozlišení. Abstraktní je nějaký diskurz pouze vůči jinému, z něhož byl abstrakcí — tj. uskupením jistých objektů diskurzu původního do ekvivalenčních tříd — odvozen, jako např. obor racionálních čísel z přirozených, obor čísel reálných z racionálních, či obecně obor množin prvků nějakého oboru. Za jistých podmínek lze takto získané obory sloučit s obory výchozími nebo, jako v případě čísel, sestrojit vnoření prvních do druhých. Jak ale víme z Fregových *Grundgesetze*, nejsou takováto sloučení, a tím pádem ani myšlení v absolutních kategoriích toho, co je (skutečné, případně možné), obecně přípustná, neboť mohou vést k dalekosáhlým problémům, jak se to stalo právě Fregovu systému nebo teorii množin. Plošná, absolutizující řeč o všem, co je, se takto právě tváří v tvář množinovým paradoxům opět ukazuje buďto jako naivní, nebo triviální, ve stejném smyslu, v jakém je triviální Cantorovo označení problematických množin za nekonzistentní. To, co nás zajímá, jsou přirozeně kritéria této konzistence, tj. existence v tom kterém problémovém okruhu.

Zcela analogicky, jako jsou některé obory abstraktní vůči jiným, se některé obory řeči chovají vůči jiným jakožto fiktivní, tj. např. diskurz řeckých bájí či mytologie k řecké historii, a my pak v případném sloučení či prolínání obou můžeme vykázat některé ze zdánlivých jmen jako určité deskripce. Variabilita možných vztahů je zde ale značná, jak to ukazují případy vět jako “Sherlock Holmes bydlí v Baker Street”, “Albert Einstein obdivuje Sherlocka Holmese” či “Albert Einstein hraje na housle lépe než Sherlock Holmes”, a je otázkou té které problémové situace, jak tyto věty logicky analyzovat, přičemž v posledku není určující opět nic jiného nežli příslušné inferenční vztahy: co považujeme obecně za přípustný úsudek a co nikoli. Označení diskurzu za fiktivní je tedy smysluplné pouze lokálně, v relaci k nějakému konkrétnímu diskurzu, který za fiktivní nepovažujeme. V absolutním užití se rovná trivialitě, neboť i oblast toho, co podle nepoučeného tazatele skutečně existuje, je definována fiktivním kondicionálem

co bych mohl zažít, kdyby . . . .

Podobně se to má s konkrétností definovanou třeba možností okamžité verifikace dané věty. — Zatímco věta jako “103 je prvočíslo” je ověřitelná

v podstatě na místě a hned, věta “z Andělského hradu je možné skočit do Tibery” ode mě vyžaduje dosti komplikovanou rutinu zakupování letenek a letního oblečení, přičemž je jasné, že v době dosažení cíle se změní čas, a tedy i pravdivostní podmínky původního výroku. Nezpochybňujeme samozřejmě, že obě věty mají dobře popsané pravdivostní podmínky, a jsou tedy v tomto smyslu nezávislé na tom, co si o jejich pravdivosti jakožto jednotlivec (!) myslím. Upozorňujeme pouze na vágnost kritérií fiktivnosti a konkrétnosti, a to právě na příkladě matematiky. Aritmetické objekty totiž, díky praxi měření a počítání, z níž vzešly, důvěrně známe od první třídy základní školy; o většině tzv. skutečných věcí, na druhou stranu, víme jen to, že o nich platí jisté věty, tj. nikdy jsme je neviděli a ani neuvidíme, protože jsou obvykle již dávno zničené nebo mrtvé. Co je tedy více fiktivní?!

Předchozí poznámky se týkaly použití klasifikátoru “fiktivní” na obory, které byly korektně sémanticky konstituovány, a z logického hlediska mezi nimi tedy není žádného ‘ontologického’ rozdílu. V oblasti aritmetiky se nyní nabízí zavést další rozlišení ve vztahu k této konstituci samé. Rozdíl aritmetiky a teorie množin totiž spočívá právě v oné definitnosti uvažované třídy objektů, dané přesným vymezením třídy substituovatelných termů a následným stanovením kritérií identity vzhledem k oboru možných predikátů a podmínek pravdivosti z nich utvořených elementárních vět, úhrnem tedy popisem toho, přes co se kvantifikuje, k čemu se odkazuje v užitých proměnných. V případě teorie množin nebyl obor proměnné vůbec popsán, resp. není vůbec jasné, jak by intersubjektivně popsán být mohl. — Namísto prvotní materiální teorie, standardního či zamýšleného modelu, máme pouhou teorii formální, se všemi omezeními, která to s sebou nese a která jsme popsali v oddíle 5.3. V teorii množin to znamená, že řeč o iterativní hierarchii a jiných ‘modelech’ této axiomatice nepředchází, ale je skrze ni teprve definována a v tomto smyslu *fiktivní*, nedourčená, stejně jako nejsou ve svých vlastnostech a vztazích dourčeni Othello a jednorožec. V aritmetice oproti tomu funguje jako požadovaný obor ohodnocení proměnných výše popsaný model standardní. Všimněme si, že s rozdílem formální a materiální teorie se mění i chápání principu indukce, kterému v prvním případě rozumíme jako mimologickému axiomu, zatímco v druhém se jedná o platné úsudkové pravidlo, které z toho, že $A(x)$ platí pro všechna čísla, vyvozuje platnost obecnou $(\forall x)A(x)$, neboť je dopředu implicitně vymezen obor všech substituovatelných termů jako T_{N}. To v prvním případě, v němž se obor kvantifikace mění, není z definice možné.

Případ analýzy představuje jakýsi mezistupeň mezi oběma zmíněnými, neboť, jak víme díky Cantorovu diagonálnímu argumentu, na rozdíl od schematicky popsaného oboru přirozených čísel obor čísel reálných systematicky fluktuuje, je ‘indefinitní’, proměnný, tj. obor jeho jazykových reprezentací nelze vyčerpat jediným (definitivním) popisem. To samo není nijak špatná zpráva, neboť se tím zdá být podchycen kategoriální rozdíl mezi diskrétním a spojitým při zachování konstruktivního úhlu pohledu, čímž míníme především fixování reálného čísla coby *nekonečné* posloupnosti čísel přirozených, resp. čísel racionálních, nějakým *konečným* předpisem, pravidlem jejich generování. Z hlediska vývoje analýzy zde ale došlo k pozoruhodnému střetu interpretací Cantorova diagonálního argumentu. Preintuicionisté, zcela určitě však raný Brouwer, jej sice zprvu četli ve výše uvedeném, jazykově-analytickém tvaru, totiž jako doklad neuzavřenosti, indefinitnosti kontinua, těžiště jejich práce ale spočívalo v oborech, kterým Cantorova teorie množin pomohla v rozkvětu, speciálně v teorii funkcí, míry a topologii. To obnášelo v první řadě porovnávání nekonečných množin co do velikosti. Kontinuum vzešlé z definovatelných posloupností bylo sice nyní indefinitní, ve své hierarchické konstrukci konsekventních úrovní (ω ordinálních úrovní mohutnosti ω, tj. ω^2, jak to odhadl Brouwer [1907, s. 83]) ale přesto nejvýše spočetné. V rozporu s očekáváním si tak jednak udrželo atomický charakter čísel a definicí, z nichž bylo utvořeno, jednak nemohlo sloužit obvyklým účelům, neboť by, jak podotkl později Brouwer [1930, s. 3], mělo podle všeho míru 0, tj. bylo by pokrytelné posloupností intervalů velikostí součtu ϵ pro libovolné $\epsilon > 0$.

V tomto problému je samozřejmě již zakomponována Cantorova představa (ne)spočetnosti jakožto absolutní charakteristiky množiny, nezávislé na daném vymezení pojmu funkce, přesně v duchu Wittgensteinovy kritiky, podle níž se na Cantorovy závěry unáhleně díváme jako na přírodní jev, tedy něco, co nepodléhá další interpretaci. V opačném případě by totiž šlo snadno poukázat na relativní neexistenci vyčíslení v rámci předem daného oboru funkcí, jak se to mnohem později stalo v oblasti rekurzivní analýzy, a my bychom před sebou neměli nic jiného nežli obdobu Löwenheimova-Skolemova paradoxu: množina všech reálných čísel je sice teoreticky vyčíslitelná, ovšem nikoli funkcí požadovaného typu, tj. toho typu, jenž byl užit k vymezení pojmu reálného čísla. Pointu tohoto obratu si ukážeme později na jednodušším, leč prototypickém případě z teorie rekurze, v níž neplatí, že by každá spočetná (principiálně vyčíslitelná) množina byla množinou spočetnou rekurzivně (efektivně vyčíslitelnou).

Momentálně je významné to, na co upozorňují Troelstra a van Dalen [1988, s. 640 n], totiž že již v rámci Borelovy teorie míry bylo možné dokázat, a dokonce Borelem nepřímo i dokázáno bylo v rámci tzv. Heineho-Borelova teorému, že *definovatelné* prvky kontinua nelze pokrýt *definovatelnou* posloupností intervalů libovolné míry. Borel [1914, s. 16] přesto jako oficiální 'rozřešení' dilematu spočetnosti a nespočetnosti kontinua navrhnul rozlišit tzv. KONTINUUM GEOMETRICKÉ, plně jištěné mimojazykovou a dále neexplikovatelnou intuicí, z níž měla prýštit jeho nespočetnost, od kontinua diskrétního, ARITMETICKÉHO, sestávajícího z posloupností racionálních čísel. Aritmetické kontinuum v Cantorově liberálním smyslu není spočetné, ale s ohledem na užití principu nekonečně opakovaného volného výběru je mírně pochybná jeho existence jako celku, byť Borel [1914, pozn. IV] nezapomíná zdůraznit, že případ nespočetné volby je ještě pochybnější. Toto kontinuum má nicméně dobře definovanou spočetnou část, kterou Borel [1914, s. 166] vzhledem k tomu, že má sloužit obvyklým matematickým potřebám, nazývá KONTINUEM PRAKTICKÝM. Jedná se právě o systém všech konečně definovatelných čísel.

Brouwerův postoj k uvedenému dilematu je v mnohém podobný Borelovu, nabývá ale komplexnějších a méně průhledných podob. Vše započalo slibně, když ve své disertaci [1907, s. 82] tvrdil, že definovatelné body kontinua tvoří speciální typ kardinality, kterou nazývá SPOČETNĚ NEDOKONČENOU (*abzählbar unfertig*, *denumerably unfinished*):

> Spočetně nedokončenou množinou rozumím takovou, v níž může být nějakým dobře definovaným způsobem vyznačeno pouze spočetné množství, z něhož lze pak ale nějakým dříve definovaným způsobem odvodit nové prvky náležející dotyčné množině.

To mohlo vést k hlubší analýze Cantorova pojmu nespočetnosti, zvláště, když se z některých Brouwerových poznámek [1912, s. 91 n] zdá, že souhlasí s identifikací "existujícího" s "definovatelným", a vylučuje tedy dopředu možnost volného výběru jako nepřípustnou. Bohužel, v souladu se svojí základní tezí o nezávislosti matematiky na jazyce, dospěl Brouwer [1907, s. 83] již dříve k názoru, že definovatelné body kontinuum v žádném případě nevyčerpávají, a 'spojitost' je tedy třeba uznat jako další, vedle spočetnosti a nedokončené spočetnosti již třetí, nekonečnou kardinalitu.[8]

Na rozdíl od Borela, jehož pojmům geometrického a praktického kontinua nechává [1930, s. 4 n] následovat pojmy KONTINUA PLNÉHO a REDUKOVANÉHO, se Brouwer pokouší sféry diskrétního a spojitého, aritmetického a geometrického, od počátku postavit na společný základ. Kontinuita reálné osy tak podle něho [1907, s. 17] není zajištěna novým (např. geometrickým) zdrojem poznání, ale touže základní intuicí coby

> jednotou spojitého a diskrétního, možností současného myšlení několika jednotek, spojených prostřednictvím 'mezi', avšak nikdy nevyčerpanou vložením nových jednotek.

Vlastním principem, spojujícím to, co je atomické, zkrocené pravidelnostmi jazyka, s tím, co je volně rostoucí, měnící se, není nicméně nakonec — pro značnou vágnost — primární intuice, ale pojem nového

[8] K otázkám vývoje pojmu kardinality u Brouwera srov. van Dalen [1999, s. 115 nn].

typu posloupnosti, tzv. posloupnosti výběrové, založené právě na konceptu volného výběru, jenž byl odmítnut Borelem. Tímto tahem mělo zůstat kontinuum pevně ukotveno v aritmetice, nepřímo tedy v tradici Weierstrasse a Cantora. To není na jednu stranu žádné překvapení, již proto, že se k pojmu výběrové posloupnosti dostal Brouwer právě recepcí Cantorova díla. Výše popsané preintuicionistické dilema, nedořešené, ba prohloubené Borelem, se tím ale prohloubilo ještě více.

Ačkoli do povědomí širší veřejnosti pronikl především svými neotřelými názory v oblasti základů, těžiště Brouwerovy matematické práce spočívalo v topologii, jejímuž rozvoji dal brzy po obhájení své disertace četné impulsy. V letech 1908–1912 publikoval přes čtyřicet topologických prací, k jejichž nejvýznamnějším výsledkům patří důkaz zobecněné Jordanovy věty a několik vět o pevném bodě, např. pro spojité zobrazení celého kruhu do sebe sama.[9] Brouwer se brzy proslavil takovou měrou, že byl roku 1914, ve svých třiatřiceti letech, kooptován za editora Kleinových *Mathematische Annalen*, jednoho z nejprestižnějších časopisů té doby. O pět let později, roku 1919, mu byla Hilbertem nabídnuta profesura v Göttingen, aby současně dostal pozvánku do Berlína, jenž si s Göttingen v oboru matematické slávy konkuroval. Brouwer sice nakonec obě nabídky odmítl, protože mu univerzita v Amsterdamu nabídla podstatné zlepšení pracovních podmínek, zmíněná fakta jsou ale velmi výmluvná, zvláště na pozadí pozdějších ideových sporů s Hilbertem, známých jako tzv. *Grundlagenstreit*.[10] Ukazuje to především, že byl Brouwer zakotven ve vládnoucí tradici více, než si byl ochoten sám připustit. Pomalu se ale již přesuňme k samotné podstatě Brouwerovy revoluce, s předchozím vylíčením několika technických prerekvizit.

Řekli jsme, že to byl Cantor, kdo ztotožněním přímky s množinou bodů (speciálně definovaných čísel) proměnil matematickou analýzu ve studium struktury reálné osy, tedy jejích topologických a metrických vlastností. Podobně, jako jsme v oddíle 5.12 zavedli pojem metrického prostoru, mohli jsme již dříve zavést pojem PROSTORU TOPOLOGICKÉHO jako libovolnou dvojici $\langle X, T\rangle$, sestávající ze základní množiny X a systému T jejích podmnožin takových, že platí

(1) $\emptyset \in T$ a $X \in T$,

[9] Další detaily viz van Dalen [1999, kap. 4, 5].

[10] Viz van Dalen [2005, kap. 15]. Tato aféra vyvrcholila roku 1928 bezprecedentním vyškrtnutím Brouwera ze seznamu editorů *Annalen.* Podstatou sporu bylo rozhodnutí těžce nemocného Hilberta zbavit se Brouwera v obavě, aby po jeho smrti nemohl prostřednictvím vlivného časopisu ohrozit další vývoj matematiky. Tento krok neměl sice žádný právní základ, většina členů rady však nechtěla Hilbertovi odporovat (jednou z mála výjimek byl Einstein, který se od celé akce od počátku distancoval), a jelikož se Brouwer zarputile bránil, byla nakonec na základě dohody s nakladatelem (Springer) rada rozpuštěna a časopis vydáván na principu hlavního editora, Hilberta, a několika spolupracovníků.

(2) když $U, V \in T$, pak $U \cap V \in T$,

(3) když $Q \subseteq T$, pak $\bigcup Q \in T$,

tj. systém T je uzavřen na konečné průniky a libovolná sjednocení. Prvkům T se říká OTEVŘENÉ MNOŽINY, jejich doplňkům MNOŽINY UZAVŘENÉ. Již z bodu (1) definice plyne, že množina může být uzavřená i otevřená zároveň.

Podmnožina $B \subseteq T$ se nazývá BÁZÍ TOPOLOGIE $\langle X, T\rangle$, jestliže lze každý prvek $U \in T$ získat jako sjednocení prvků z B, tj. $U = \bigcup\{V \in B \mid V \subseteq U\}$. Tak např. systém otevřených intervalů na přímce, či obecně na uspořádané množině $\langle X, <\rangle$, jak jsme je uvažovali v kapitole 2, tvoří bázi tzv. TOPOLOGIE USPOŘÁDÁNÍ (*order topology*). Ta je nezávisle definována podmínkou, podle níž je $Y \subseteq X$ otevřená, jestliže pro libovolný bod $y \in Y$ existuje otevřený interval $(a, b) \subseteq Y$, takový, že $y \in (a, b)$. OKOLÍ bodu x, značené $U(x)$, je libovolný prvek T, jemuž x náleží. Z libovolného metrického prostoru $\langle X, d\rangle$ lze vytvořit prostor topologický tak, že vezmeme jako bázi systém všech tzv. OTEVŘENÝCH KOULÍ

$$U(x, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

se středem $x \in X$ a poloměrem $\epsilon \in \mathsf{R}$, kde $\epsilon > 0$. Koule je vlastně naše známé ϵ-okolí bodu x.

Významné příklady topologických prostorů, souvisejících úzce s reálnými čísly, jsou tzv. BAIRŮV a CANTORŮV PROSTOR všech posloupností přirozených čísel N^{N}, resp. jedniček a nul 2^{N}. Bázi topologie zde tvoří množiny těch posloupností, které mají společný nějaký počáteční úsek. Ekvivalentně lze říci, že se množina Y nazývá otevřená, jestliže pro každé $y \in Y$ existuje n takové, že do Y náleží všechny posloupnosti, které se s y shodují v prvních n členech. Oba prostory lze reprezentovat formou stromu, jehož uzly tvoří počáteční segmenty (aproximace) daných posloupností, které jsou jeho celými větvemi. Bairův strom se přitom v každém uzlu větví nekonečněkrát, zatímco strom Cantorův má pouze konečná větvení. Alternativní způsob zavedení topologie je přes definici metriky

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x = y, \\ \frac{1}{2^n} & \text{jestliže } x \neq y \text{ a k rozdílu došlo v } n\text{-tém členu.} \end{cases}$$

Definice je přirozená, jak to lze snadno nahlédnout třeba na případě libovolného (netriviálního) n-adického rozvoje reálného čísla z intervalu $(0, 1)$: čím delší je shoda počátečních úseků, tím menší je vzdálenost obou bodů, tedy i velikost příslušného okolí. Aby ale nedošlo k mýlce: Bairův ani Cantorův prostor nejsou přímo topologicky ekvivalentní (homeomorfní) s prostorem R, ale s jeho podprostory, např. všech iracionálních čísel v případě prvním a s diskontinuem v případě druhém. Přitom:

> Dva topologické prostory $\langle X_1, T_1\rangle$ a $\langle X_2, T_2\rangle$ nazýváme HOMEOMORFNÍ, jestliže existuje bijekce $f : X_1 \leftrightarrow X_2$ taková, že pro každé $U \subseteq X_1$ platí: $U \in T_1$ tehdy a jen tehdy, když $f[U] \in T_2$.

O to nám ale nyní nejde.[11] Podstatné je, že máme v principu prvky kontinua opět reprezentovány nekonečnými posloupnostmi přirozených čísel, navíc v jisté vizuálně přitažlivé formě. Dále je zřejmé, že některým z nich odpovídají konečná konstruktivní schémata, předem popisující konstruovanou větev stromu. Odpovídající posloupnost se pak nazývá ZÁKONNÁ (*gesetzartig*, *given by a law*). Cantorův diagonální argument ovšem otevřel možnost uvažovat posloupnosti, které zákonem dané nejsou, jsou zcela libovolné, 'určené' náhodou (např. hodem kostky) či okolnostmi, které neznáme. O nich budeme hovořit jako o posloupnostech VOLNÝCH (*gesetzlos*, *lawless*). Brouwerův termín VÝBĚROVÉ POSLOUPNOSTI (*choice sequence*, *Wahlfolge*), dost možná inspirovaný skandálem kolem Zermelova axiomu (svobodného) výběru, obvykle zahrnuje oba typy. První odkaz k výběrové posloupnosti jakožto součásti intuicionistické matematiky se nachází v jedné z Brouwerových recenzí, konkrétně [1914*b*, s. 79].

Všimněme si, že z naší interpretace Cantorova diagonálního argumentu z oddílu 6.2 nijak neplyne, že by nutně existovaly jiné než zákonné posloupnosti, což je ostatně právě východisko konstruktivistické interpretace kontinua. Brouwer sám, jak jsme zmínili, tento názor zprvu sdílel, např. když ve své inaugurační přednášce [1912, s. 92] připisoval pojetí reálného čísla založené na volném výběru svému nepříteli — formalismu, zatímco intuicionismus charakterizoval omezením na posloupnosti zákonné. Stejně jako Borel však o této alternativě pochyboval, jednak z čistě technických, byť ne vždy oprávněných důvodů (spočetné kontinuum má míru 0), jednak z důvodů vnitřních, ideových, které jej stále více přibližovaly Cantorovu metafyzickému stanovisku jazykem nespoutané matematiky. Jelikož Brouwer sám byl na rozdíl od Cantora silně antiplatonisticky zaměřen, rozhodl se najít třetí cestu v příklonu k radikálnímu subjektivismu.

Zatímco podle Cantora je celek reálných čísel neuchopitelný, nezávislý na jazyce, neboť existuje před ním, v platónské říši idejí, je podle Brouwera tato nezávislost dána svobodnou vůlí tvůrčího subjektu, tedy naopak subjektivitou lidské mysli, která jazyku v jeho intersubjektivitě předchází a je mu nadřazena, "neboť nikdo ještě nebyl s to sdělit svoji duši prostřednictvím jazyka".[12] Brouwer i Cantor tak stojí na opačných

[11] Vlastnosti zmíněných prostorů jsou popsány např. in Truss [1997, kap. 10] či Deiser [2007, část 2].

[12] Tento citát je trochu zákeřně převzat z Brouwerova mystického spisu [1905].

stranách základní teze analytické filosofie, artikulované později Wittgensteinem, totiž že není poznání mimo jazyk a že jazyk je (jediným) médiem intersubjektivity, tj. neexistuje žádný jazyk soukromý, natož pak možnost soukromého, jazykem neartikulovatelného objevu na straně jedné, ani v principu nepopsatelná, hyperobjektivní říše preexistujících věcí a faktů na straně druhé. Tato teze sama není na rozdíl od zprvu zmíněných metafyzická, chápeme-li ji jako výraz postřehu, že není žádný praktický důvod předpokládat existenci či poznání tam, kde ho z definice nelze dosáhnout. Z důvodů přílišné popularity termínu se to stydím nazývat Occamovou břitvou.

Ačkoli tedy byla Wittgensteinovi v přechodu od *Tractatu* [1922] k *Filosofickým zkoumáním* [1953] Brouwerova filosofie bezesporu mocnou inspirací, její vlastní podoba včetně důsledků, které má, pouze ukazuje, že extrémy platonismu a psychologismu jsou nakonec vždycky jen dvě strany téže mince. V praxi totiž zůstávají veškeré jejich rozdíly pouze verbální, kdy jedna strana připisuje autorství svých objevů Bohu, zatímco strana druhá panteisticky věří v tajemnou sílu intuice. Názorně to demonstruje závěrečný slogan Brouwerovy disertace [1907, s. 97], až nápadně podobný Cantorovu prohlášení citovanému v oddíle 2.8:

> Matematika je svobodný výtvor, nezávislý na zkušenosti; vyvíjí se z jediné apriorní pra-intuice, kterou lze nazývat *konstantou ve změně* a *jednotou v mnohosti*.

S přihlédnutím k takovýmto deklaracím lze říci, že pravda je někde mezi platonismem a mentalismem, zpravidla však blíže k platonismu, jehož (antropomorfní) Bůh má menší sklony k svévoli nežli subjektivistův vnitřní démon. Brouwerova matematika je toho nepochybným důkazem.

Brouwer přitom chápal pojem výběrové posloupnosti jako rozšíření pojmu posloupnosti plně určené zákonem do posloupnosti, která je zákonem určena jen z části a povolený prostor pokračování dosud zkonstruované řady je plně v kompetenci svobodného rozhodnutí ideálního matematika, tj. subjektu prostého matematicky irelevantních vlastností. K výběrovým posloupnostem dospěl Brouwer v kontextu toho, co zprvu nazýval 'matematickou množinou' jako protikladu k množině získané jazykovou komprehenzí, tj. logicky.[13] Z tohoto pojmu se záhy vyvinul základní a vlastně ustanovující pojem intuicionistické teorie množin a matematiky, tzv. *rozložení* (*spread*).[14] Klasickému pojmu množiny přiřazuje Brouwer termín *species*, z kapitol, které jsme věnovali teorii mno-

[13] V poznámkách na okraji rukopisu svých přednášek z roku 1917. Viz van Dalen [1999, s. 240].

[14] V češtině, je-li mi alespoň známo, se pro Brouwerův původní termín "spreiding" ještě neuchytilo žádné pojmenování, a je tedy otázka, zda by mnou zvolený překlad nebylo možné nahradit něčím sugestivnějším. V němčině se nicméně užívá mnohem fádnější "Menge", případně "Ordnung", viz Heytingův rejstřík in Brouwer [1975].

žin, ale plyne, že to odpovídá spíše pojmu množiny ve smyslu Fregově nežli Cantorově, neboť Cantor podobně jako Brouwer vyžaduje ještě dodatečně jistá vágně-konstruktivní specifika (obecnou vyčíslitelnost). Tato vágnost spjatá s balíčkem údajně 'intuitivních' principů je tím, čím se liší Brouwerův intuicionismus od matematického konstruktivismu.

Jestliže je podle Cantora množina dána zároveň se svým ordinálním vyčíslením, tj. jako výsledek nekonečné konstrukce kopírující nějaký fragment ordinální řady, je Brouwerova množina, tj. *spread*, v základní formě definována jako zákon, jenž pro danou, dosud zkonstruovanou posloupnost čísel určí neprázdný obor možností, jak pokračovat, a vede tedy ke konstrukci nekonečného stromu. Jeho větve, výběrové posloupnosti, jsou pak prvky daného rozložení. Je-li možnost výběru omezena vždy na jedinou volbu, máme před sebou zákonnou posloupnost. V opačném případě je rozložení vlastně množina více či méně determinovaných možností — volných posloupností, Brouwerem přirovnávaná k živému, podle možností se rozvíjejícímu organismu, jehož duší je tvůrčí subjekt. Strom N^{N} představuje opačný extrém ke zcela determinovanému rozložení, totiž množinu, na jejíž rozvoj či růst ('spread') nebyly kladeny žádné dodatečné požadavky.[15] Podstatná zůstává nicméně zásada, že kromě příslušného zákona je rozvoj v tom kterém uzlu určen vždy konečným sledem uzlů předchozích. Na ní je totiž vystavěn Brouwerův převrat Cantorovy koncepce, jehož podstatu můžeme naznačit již nyní.

Podstata Brouwerova principu konečné manipulace s nekonečnými posloupnostmi čísel, jenž z nich teprve dělá posloupnosti výběrové, je obvykle ilustrována na případě aritmetických operací. Chceme-li např. sčítat dvě reálná čísla coby Cauchyho posloupnosti čísel racionálních, nemusíme znát přímo zákon jejich rozvoje, ale vždy jenom jejich počáteční úseky s tím, že na jejich základě dokážeme nějak vyprodukovat další členy. Ty nás již dovedou k dalšímu členu součtu, neboť sčítání bylo definováno po částech, viz oddíl 2.1.[16] K zásadnímu průlomu ve volbě pojmů nejspíše došlo tehdy, když si Brouwer v rámci svého pravidelně se opakujícího kurzu teorie množin v akademickém roce 1916/1917 uvědomil,[17] že mu pojem výběrové posloupnosti dává možnost nahradit Cantorův diagonální důkaz nespočetnosti kontinua důkazem jiným, jenž má také dalekosáhlé důsledky, ovšem naprosto jiného, nečekaného druhu. Tím proměnil svůj dosud negativistický program 'mírného' popírání klasických matematických vět a logických principů (odkazem na jejich nespolehlivost) v program pozitivní: jsou dokazovány teorémy nové, z nichž mnohé přímo protiřečí těm klasickým. Předveďme proto hlavní myšlenku Brouwerovy varianty důkazu věty:

[15] Brouwerovy původní definice nejsou příliš jasné a jednoznačné, náš popis odpovídá pozdější cizelaci, kterou předvedeme v následujících oddílech.

[16] Tento příklad je uveden in Heyting [1956, s. 33]. Všimněme si, že nutně neplatí, že bychom z počátečních úseků kanonického, např. desetinného rozvoje čísel dokázali vypočíst počáteční úsek kanonického tvaru součtu: máme-li třeba $0,33333$ a $0,66666$, pak není zřejmé, zda psát $0,99999$ nebo $1,00000$ s ohledem na další členy, které ještě neznáme.

[17] Viz van Dalen [1999, s. 242 n].

> Bairův prostor N^{N} je nespočetný.

Důkaz: Předpokládejme, že existuje zobrazení $f : \mathsf{N}^{\mathsf{N}} \to \mathsf{N}$, přiřazující každé posloupnosti $\alpha \in \mathsf{N}^{\mathsf{N}}$ nějaké přirozené číslo. Jelikož s výběrovými posloupnostmi lze pracovat pouze na základě konečného počátečního fragmentu, znamená to, že hodnota $f(\alpha)$ musí být vypočítána na bázi hodnot $\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n)$ pro nějaké n. Tím pádem je ale všem posloupnostem tohoto počátku funkcí f přiřazeno totéž přirozené číslo, což znamená, že f není injektivní. $\square$

To vše, ač nezvyklé, stále ještě nepůsobí nijak kontroverzně. Rychlá inspekce základních topologických pojmů, zejména pojmu okolí v N^{N}, ale záhy ukáže, že v důkazu nespočetnosti Bairova prostoru máme zároveň důkaz věty, že je každá totální funkce z kontinua do přirozených čísel spojitá, ba dokonce konstantní, což jistě neplatí klasicky. Na bázi dalších 'jednoduchých' principů dokáže Brouwer v průběhu času jak tezi, že je spojitou i každá totální funkce na kontinuu, jak si to přáli zakladatelé novověké analýzy, tak tvrzení, že kontinuum nejde rozdělit na dvě disjunktní neprázdné části, jak si to přál Aristotelés. Než se k tomu dostaneme, vraťme se ještě k některým negativním částem Brouwerova programu a přesnější formulaci užitých pojmů.

7.3 Slabé protipříklady

Zpochybnění zákonů klasické logiky, k němuž sáhl Brouwer ve své disertaci, bylo založeno na specifické interpretaci logických konstant, díky níž se z klasických tautologií stala aritmeticky pochybná tvrzení. Brouwer a jeho následovníci se ovšem zdráhají dopředu říci, jakáže interpretace to je, nechávajíce ji "vyvstat z matematické intuice a zkušenosti",[18] pročež se ani nelze divit, že — jak kdosi poznamenal — existuje tolik konstruktivismů co konstruktivistů.[19] Na druhou stranu má tento přístup přinejmenším tu výhodu, že problematizuje představu o přirozených zákonech jediné možné logiky a přivádí nás ke konceptu jazykové hry, kterou je třeba odlišit od smysly vnímatelné formy jazyka, jakožto něčeho primárního, podstatného. Herní příměr je ale Brouwerovi v jiném smyslu nepříznivý, neboť každá hra aspirující na širší, nikoli jen lokální či

[18] Bridges & Richman [1987, s. 11].

[19] Kniha Bridges & Richman [1987], z níž je uvedený citát převzat, se příznačně jmenuje *Varieties of Constructive Mathematics*.

zcela soukromé užití (je-li něco takového vůbec možné, tj. je-li pouze soukromá hra vůbec ještě hrou) vyžaduje jasně formulovaná, a tudíž obecně následovatelná pravidla, tj. především není záležitostí jednotlivce a jeho subjektivních stavů.

Z Brouwerovy kritiky vyloučeného třetího, jejíž obětí se stal prominentně Hilbertův axiom obecné řešitelnosti matematických úloh, můžeme vyčíst některé jednoduché zásady, které později shrnul Brouwerův student Arend Heyting [1930*a*] do kánonu intuicionistické logiky. Brouwer [1925, s. 253] sice průběžně označoval některé zákony za intuicionisticky platné, např. $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$, obecně se ale držel devízy, že se jedná spíše o pravidelnosti důkazů, které užívá, nežli o zákony, jež by nějak systematicky respektoval. Jednu z takových pravidelností artikuluje zásada, že důkaz disjunkce $A \vee B$ vyžaduje důkaz alespoň jednoho z členů, jak to právě v případě $A \vee \neg A$ nejsme velmi často s to zajistit. Podobně jsme při zdůvodnění věty $(\exists x)A(x)$ coby zobecněné disjunkce zavázáni k udání instance n, pro niž $A(n)$ platí, což znamená, že existenční kvantifikace je systematicky čtena efektivně, ve smyslu: "umím najít takové x, že $A(x)$". To narušuje běžné chápání kvantifikátoru coby notační zkratky, neboť za frází "existuje x takové, že ..." se mohou skrývat velmi odlišné pravdivostní podmínky. Ukázkou konstruktivně neplatného zdůvodnění, používanou snad ve všech úvodech věnovaných tématu,[20] je důkaz následující věty:

Existují iracionální čísla x, y taková, že je x^y racionální.

Důkaz: $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je racionální *nebo* iracionální. Pokud je racionální, jsme hotovi, pokud ne, vezmeme číslo $a^{\sqrt{2}}$. $\square$

Názorně zde vidíme, že smysl neboli pravdivostní podmínky syntakticky identických vět se v klasické a konstruktivní logice podstatně liší. Zvláště markantní je to u tvrzení formy $(\forall x)(\exists y)A(x, y)$, jejíž efektivní čtení — možná paradoxně — indukuje axiom výběru

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y) \rightarrow (\exists f)(\forall x)A(x, f(x))$$

jako intuicionisticky akceptovatelný princip. Některé jeho obecnější varianty se nicméně dostávají do sporu s jinými konstruktivistickými principy.[21] Vraťme se ale zpět k logickým operátorům.

Implikace bývá čtena jako vyjádření toho, že jsme schopni transformovat důkaz antecedentu na důkaz konsekventu. Negací $\neg A$ se obvykle míní transformace důkazu A na důkaz sporu $\perp$, jenž může konkrétně zastupovat třeba věta $0 = 1$. To odpovídá větě $A \rightarrow \perp$. Prohlášení

[20] Viz třeba Dummett [1977, s. 6] a Wolf [2005, s. 321].
[21] Viz Bridges & Richman [1987, s. 11, 106 nn].

tohoto čtení za kanonické ovšem vede k některým otázkám ohledně dalších možných konstruktivních výkladů negace, kdy se např. v případě $A := (\forall x)B(x)$ nabízí interpretovat vyloučený třetí silněji jako tvrzení

$$(\forall x)B(x) \vee (\exists x)\neg B(x),$$

což není ekvivalentní s $(\forall x)B(x) \vee \neg(\forall x)B(x)$, neboť z (nepřímého) vyvrácení $(\forall x)B(x)$ ještě neplyne vyvrácení konstruktivní, přímé, předvádějící konkrétní instanci n takovou, že $\neg B(n)$. První případ ovšem již implikuje druhý, tj. $(\exists x)\neg B(x) \rightarrow \neg(\forall x)B(x)$ je tautologií intuicionistické logiky. Brouwer občas užívá také další, tentokráte oslabenou verzi negace ve smyslu aktuální nerozhodnosti problému. Věta $A \rightarrow \perp$ se tak rovná tvrzení principiální nerozhodnutelnosti ("absurdity")[22] a nejsilnější verzi popření představuje vyvrácení doložené konstruktivním protipříkladem. Tyto protipříklady je třeba odlišit od tzv. PROTIPŘÍKLADŮ SLABÝCH (*weak counterexamples*), jimiž není platnost nějakého zákona vyvrácena, ale zpochybněna.

Brouwer později, v rámci přednášek v Berlíně a Vídni,[23] kanonizoval metodu svých raných protipříkladů tím, že klíčové prvky obvyklé konstrukce pojmenoval. Základem byla tzv.

PRCHAJÍCÍ VLASTNOST (*fliehende Eigenschaft*, *fleeing property*) B, což je vlastnost (i) rozhodnutelná, tj. $(\forall x)(B(x) \vee \neg B(x))$, o níž ale (ii) zatím není známo ani zda $(\exists x)B(x)$, ani zda $(\forall x)\neg B(x)$.

Příkladem takové vlastnosti je např.

x je sudé číslo větší než 2, které není součtem dvou prvočísel,

která je základem dosud nerozhodnuté Goldbachovy domněnky, podle níž takové číslo neexistuje. Prchající byla donedávna vlastnost

x je místo rozvoje čísla π, na němž začíná posloupnost číslic 0123456789.

První číslo k, pro něž platí $B(k)$, se nazývá KRITICKÉ (*Lösungszahl*, *critical number*) a pro posledně zmiňovanou vlastnost bylo nedávno objeveno jako 17387594880.[24] Tzv. KYVADLOVÉ číslo (*Pendelzahl*, *pendulum number*) $a := (a_n)_{n \in \mathsf{N}}$ může být pak např. definováno následovně:

$$a_n = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^n & \text{jestliže } (\forall m \leq n)\neg B(m), \\ (-\frac{1}{2})^k & \text{jestliže } k \leq n \text{ a } k \text{ je kritické.} \end{cases}$$

[22] Viz Brouwer [1923].
[23] Berlínské přednášky se konaly roku 1927 a byly vydány teprve nedávno jako Brouwer [1992]. Byly opakovány ve Vídni o rok později a tiskem vydány jako Brouwer [1929] a Brouwer [1930].
[24] Viz Borwein [1998].

Předpokládáme-li, že je reálné číslo, nebo, jak intuicionisté rádi říkají, GENERÁTOR REÁLNÉHO ČÍSLA (*real number generator*), definováno stejně jako jistá Cauchyho posloupnost čísel racionálních, s rozdílem v efektivním čtení kvantifikátorů, není obtížné zjistit, že uvedená posloupnost a této definici vyhovuje, tj. že jsme pro dané m s to najít člen a_q, od něhož dále rozdíly mezi členy nepřekračují hodnotu $\frac{1}{m}$. Posloupnost a pak podle konstrukce v pravidelných, zužujících se výkyvech osciluje kolem nuly, dokud se eventuálně nezastaví na kritické mocnině a stane se konstantní. Kdyby nyní, při Brouwerově čtení logických spojek, platilo

$$a = 0 \vee a \neq 0,$$

znamenalo by to, že umíme rozhodnout Goldbachovu domněnku nebo jakékoli jiné tvrzení, které se za $B(x)$ skrývá. To je ale v rozporu s předpokladem, což dělá z kyvadlového čísla slabý protipříklad k zákonu vyloučeného třetího. Ze stejného důvodu neplatí trichotomie

$$a < 0 \vee a = 0 \vee a > 0.$$

Brouwer [1921] také sestrojil slabý protipříklad proti tvrzení, že má každé reálné číslo desetinný (obecně: p-adický) rozvoj. To může zpočátku vyhlížet jako konstruktivně neúnosné, neboť definice Cauchyho posloupnosti od nás vyžaduje, abychom se od určitého členu dostali pod libovolnou, předem zvolenou hranici přesnosti, tedy i hranici vzniklou rozdělením výchozího intervalu na deset (resp. p) stejně velkých částí. Problém mohou nicméně způsobit právě posloupnosti oscilující na hranicích pomyslného dělení, u nichž bude člen a_q, nalezený pro dané m, vždy tak blízko zvolené mřížky, že ji interval, v němž se mají nacházet všechny členy následující, překryje, tj. nebude jasné, na jakou z jejích stran se další vývoj posloupnosti vychýlí.

Pozoruhodné je, že přes výslednou neurčitost jsou ve svém rozvoji kyvadlová čísla popsána zcela deterministicky, tj. jedná se o posloupnosti zákonné, nikoli obecně výběrové či volné. K zobecnění své metody tímto směrem dospěl Brouwer v rámci berlínských přednášek, kdy nechal další vývoj posloupnosti, jako je a, určovat mentálními stavy tvůrčího subjektu.[25] Domníval se tak podat skutečně 'silný' protipříklad vůči zákonům klasické logiky, neboť slabé protipříklady závisely na vnějších okolnostech, a mohly tedy protipříklady přestat být. Na slabých protipříkladech jsou také založené slabé verze matematických vět, které klasicky neplatí, jmenovitě

(1) každá totální funkce na kontinuu je spojitá,

(2) kontinuum nelze rozdělit na dvě neprázdné části.

[25] "Metodou tvůrčího subjektu" nazval tento postup ale až později in [1948].

První tvrzení se přitom zdá být z klasického hlediska snadno vyvratitelné, uvážíme-li funkce definované po částech, jako

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{když } x \leq 0, \\ +1 & \text{když } x > 0. \end{cases}$$

Podle Brouwerovy 'logiky' ale k úspěšné definici této funkce v bodě x musí být znám jeho vztah k 0, tj. jedna z podmínek $x \leq 0$, $x > 0$. V případě kyvadlového čísla tomu tak zjevně není, a funkce f tedy není totální. Podobně se proti druhému tvrzení nabízí uvážit systém množin (řez)

$$A = \{x \mid x \leq 0\} \qquad\qquad B = \{x \mid x > 0\}.$$

Stejný argument ale ukáže, že se nejedná o rozklad množiny R na dvě disjunktní a vyčerpávající části, neboť kyvadlové číslo a nenáleží (alespoň zatím) ani jedné z nich. — Právě tomuto relativizujícímu dodatku ("alespoň zatím") chtěl Brouwer zabránit tím, že nechal a systematicky nedourčené, tj. nevázané na nějakou konkrétní prchající vlastnost, případně ponechal vývoj její extenze libovůli tvůrčího subjektu. Nežli přejdeme k pozitivním důkazům teorémů (1), (2), naznačme ještě pro kontrast, jak se s nimi vypořádává klasická analýza.

Je zřejmé, že první z nich v ní jednoduše neplatí, tj. na kontinuu existují totální funkce, které nejsou spojité dokonce v žádném bodě, třeba tzv. FUNKCE DIRICHLETOVA

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \text{ je racionální,} \\ 0 & \text{když } x \text{ je iracionální.} \end{cases}$$

Co se týče případu nerozdělitelnosti (klasického) kontinua na dvě části, zde si, jako již nejednou, vypomáhá Cantorova teorie topologickým trikem. Cantorovo kontinuum lze samozřejmě rozdělit na dvě disjunktní části libovolným bodem, který mu náleží, již ale neplatí, že by ho šlo rozložit na dvě otevřené a přitom disjunktní a neprázdné množiny. Vzhledem k tomu, že rozklad topologického prostoru na dvě neprázdné otevřené části implikuje, že v něm kromě nosiče a prázdné třídy existují ještě jiné množiny, které jsou současně uzavřené a otevřené, jedná se vlastně o dvě ekvivalentní podmínky, tj. výskyt dalších uzavřených a současně otevřených množin kromě dvou právě zmíněných je měrou (ne)souvislosti prostoru:

> Topologický prostor $\langle X, T\rangle$ se nazývá SOUVISLÝ (*connected*, *zusammenhängend*), jestliže v něm s výjimkou množin $\emptyset$ a X neexistuje množina $A \subseteq X$, která by byla otevřená a uzavřená zároveň.

Termín souvislosti jsme přitom, následujíce Cantora, použili v oddíle 2.10 pro jiný, i když spřízněný metrický pojem. To si nyní dovolujeme změnit tím, že stanovíme:

> Metrický prostor $\langle X, d\rangle$ se nazývá ZŘETĚZITELNÝ (*chainable*, *verkettet*), jestliže pro libovolné dva body $a, b \in M$ a kladné číslo $\epsilon \in \mathsf{R}$ existuje konečná posloupnost bodů $c_1, c_2, \ldots, c_n \in M$ taková, že $a = c_1$, $b = c_n$ a $d(c_i, c_{i+1}) < \epsilon$ pro $1 \leq i < n$.

Lze dokázat, že každý souvislý metrický prostor je zřetězitelný. Opačné tvrzení platí až pro tzv. prostory kompaktní:

> Topologický prostor $\langle X, T\rangle$ se nazývá KOMPAKTNÍ, jestliže ke každému jeho pokrytí existuje konečné podpokrytí, kde POKRYTÍM $\langle X, T\rangle$ myslíme takovou množinu $M \subseteq T$, že $\bigcup M = X$, a PODPOKRYTÍM pokrytí M každé $M' \subseteq M$, které je opět pokrytí.

Věta o kompaktnosti pro výrokovou a predikátovou logiku převzala své jméno právě odtud. Vzpomeneme-li dále na avizovanou souvislost věty o kompaktnosti s Königovým lemmatem, a toho zase s větou Bolzanovou-Weierstrassovou, nahlédneme snadno spřízněnost uvedené definice kompaktnosti (1) s jinou obvyklou definicí, podle níž je topologický prostor kompaktní, (2) má-li v něm každá nekonečná množina alespoň jeden hromadný bod, případně (3) jestliže v něm má každá nekonečná posloupnost konvergující podposloupnost. Tyto definice jsou si ale ekvivalentní pouze nad metrickými prostory, což nám s ohledem na další výklad nevadí. Pro ilustraci ukažme přechod od (1) k (2), jenž platí obecně:

Důkaz: Předpokládejme, že v topologickém prostoru $\langle X, T\rangle$ existuje nekonečná množina $A \subseteq X$, která nemá v X žádný hromadný bod, tj. ke každému bodu $x \in X$ existuje okolí $U(x)$, které neobsahuje více než konečně mnoho prvků A. Tato okolí dávají dohromady pokrytí M celého X, k němuž existuje nějaké konečné podpokrytí M'. To přirozeně pokrývá i A. Jelikož má každý prvek M, a tedy i M', konečný průnik s A, znamená to, že je A také konečné, což je v rozporu s předpokladem. □

Z dříve řečeného je přitom zřejmé, že kontinuum R kompaktní není, lze je ale snadno kompaktním udělat přidáním největšího a nejmenšího prvku. R je nicméně tzv. LOKÁLNĚ KOMPAKTNÍ, což znamená, že pro každý jeho bod x existuje okolí $U(x)$ a kompaktní množina V taková, že $U(x) \subseteq V$. Pojem kompaktnosti množiny $Y \subseteq X$ získáme přirozeně tak, že se na ni podíváme jako na PODPROSTOR $\langle Y, T|Y\rangle$ výchozího prostoru $\langle X, T\rangle$, kde $T|Y \overset{\text{def}}{=} \{U \cap Y \mid U \in T\}$. Příkladem kompaktního prostoru je Cantorův prostor 2^{N} a každý uzavřený interval $[a, b] \subseteq \mathsf{R}$. Samotný prostor R, jak jsme řekli, je jen lokálně kompaktní a Bairův prostor N^{N} není dokonce ani to.

7.4 Rozložení a species

Vzhledem k tomu, že má být Brouwerův pojem množiny základem vlastní intuicionistické matematiky, potřebujeme jeho přesnou formulaci. Začněme ale pro zajímavost Brouwerovou [1918, s. 3] původní definicí:

> *Rozložením* [Menge] rozumím *zákon*, na jehož základě, kdykoli je opakovaně zvolen libovolný člen posloupnosti ξ komplexů číslovek, generuje tato volba buďto určitý znak, nebo nic, nebo se zablokuje celý proces a výsledek je zrušen, přičemž pro každé n po nezastavených $n-1$ volbách existuje alespoň jeden komplex číslovek, jenž v případě, že bude vybrán jako n-tý, *nepovede* k zablokování procesu. Každá tímto způsobem vytvořená posloupnost symbolů (kterou tedy v obecném případě nelze prezentovat jako ukončenou) se nazývá *prvkem rozložení*. Společný způsob vzniku prvků rozložení M budeme rovněž označovat jako *rozložení* M.[26]

To je jen dokladem faktu, že Brouwerův toporný vyjadřovací styl rozhodně nepomohl šíření jeho myšlenek, neboť ani ti, kdo jim byli přátelsky nakloněni, případně proti nim nebyli nijak zaujati, jako např. Abraham Fraenkel, nebyli s to pochopit jeho terminologii.[27] Z tohoto důvodu budeme dále užívat pojmosloví a notaci reformovanou později Kleenem (a Vesleyem) [1965] a Dummettem [1977]. V dalším textu se proto držme písmen α, β, ... pro výběrové posloupnosti z ${\mathsf{N}_0}^{\mathsf{N}}$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ... pro členy posloupnosti α a $\bar{\alpha}(n)$ pro počáteční úsek $\langle\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n)\rangle$. Symbol $\bar{\alpha}(0)$ můžeme užívat ve významu prázdného sekventu $\langle\rangle$.

Idea je, že uzly konstruovaného rozložení jsou konečné posloupnosti $\vec{u} = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, \ldots, v_l\rangle$ přirozených čísel, včetně posloupnosti $\langle\rangle$ prázdné. Označíme-li jejich spojení jako $\vec{u}\star\vec{v} \overset{\text{def}}{=} \langle u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l\rangle$, dospíváme v terminologii stromů k následujícím definicím:

$$\vec{u} <_B \vec{v} \rightleftharpoons (\exists e)(\vec{u} \star \langle e\rangle = \vec{v}) \qquad \vec{u} \leq \vec{v} \rightleftharpoons (\exists \vec{w})(\vec{u} \star \vec{w} = \vec{v}).$$

[26] Originál zní: “Eine *Menge* ist ein *Gesetz*, auf Grund dessen, wenn immer wieder ein willkürlicher Ziffernkomplex der Folge ξ gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder ein bestimmtes Zeichen, oder nichts erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses und die definitive Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes n nach jeder ungehemmten Folge von $n-1$ Wahlen wenigstens ein Ziffernkomplex angegeben werden kann, der, wenn er als n-ter Ziffernkomplex gewählt wird, *nicht* die Hemmung des Prozesses herbeiführt. Jede in dieser Weise von der Menge erzeugte Zeichenfolge (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist) heisst ein *Element der Menge*. Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer Menge M werden wir ebenfalls kurz als *die Menge M* bezeichnen.”

[27] Viz van Dalen [1999, s. 314]. Na konferenci v Nauheimu roku 1920, kde Brouwer přednesl svůj článek [1921] o neexistenci desetinného rozvoje pro každé reálné číslo, se údajně Edmund Landau vyjádřil v tom smyslu, že by bylo vhodné zavést sekci patologické matematiky a včlenit ji do lékařské sekce. Viz van Dalen [1999, s. 327].

Označíme-li obecně systém všech konečných posloupností množiny A včetně $\langle\rangle$ jako $A^{<\mathsf{N}}$, pak rozložení je v principu definováno jako jistá podmnožina systému $\mathsf{N}_0{}^{<\mathsf{N}}$ splňující jisté doplňující podmínky. Následujíce Brouwerovo *dictum* řekneme:

> Rozložení S je ve své existenci určeno tzv. zákonem rozložení (*spread-law*) Λ_S, jenž rozděluje prvky $\mathsf{N}_0{}^{<\mathsf{N}}$ na přípustné ($\vec{u} \in S$) a nepřípustné ($\vec{u} \notin S$) ve vztahu k Λ_S a respektuje vždy soubor následujících globálních podmínek: (1) S je rozhodnutelná, tj. $(\forall \vec{u} \in \mathsf{N}_0{}^{<\mathsf{N}})(\vec{u} \in S \vee \vec{u} \notin S)$, (2) $\langle\rangle \in S$, (3) každý přípustný prvek má nějakého přípustného přímého následníka, tj. $(\forall \vec{u} \in S)(\exists e)(\vec{u} \star \langle e \rangle \in S)$ a (4) každý přípustný prvek má přípustné všechny své předchůdce, tj. $(\forall \vec{u}, \vec{v})(\vec{u} \leq \vec{v} \wedge \vec{v} \in S \rightarrow \vec{u} \in S)$.

Tyto podmínky dělají z Λ_S evidentně popis stromu, ve vztahu k němuž samotnému se S nazývá nahým rozložením (*naked spread*). Brouwerova původní definice vede ale k podstatně komplexnějšímu pojmu, jejž popíšeme takto:

> Ošacené rozložení (*dressed spread*) S_C je rozložení S, k němuž navíc přistupuje komplementární zákon (*complementary law*) Γ_S, přiřazující každému prvku $\vec{u} \in S$ nějaký prvek $\Gamma_S(\vec{u})$ komplementární množiny C.

Řekneme, že posloupnost α je prvkem (nahého) rozložení, symbolicky $\alpha \in S$, jestliže $(\forall n)(\bar{\alpha}(n) \in S)$. Na S se tedy díváme dvojím způsobem: (1) jako na systém nekonečných posloupností a (2) jako na korespondující systém jejich konečných fragmentů; odlišení je obvykle zajištěno na úrovni notace ($\alpha \in S$ vs. $\vec{u} \in S$). Každému prvku $\alpha \in S$ lze navíc snadno přiřadit posloupnost

$$\Gamma_S(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \langle \Gamma_S(\bar{\alpha}(0)), \Gamma_S(\bar{\alpha}(1)), \ldots \rangle$$

prvků z C, o níž pak můžeme hovořit jako o prvku S_C. V dalším textu budeme pokud možno vynechávat indexy zákonů Λ a Γ. Nyní několik příkladů.

Jednoduchý příklad nahého rozložení je takové rozložení, jehož zákon Λ neklade žádné omezení na přípustné posloupnosti. Tím pádem jsou podmínky (1–4) splněny automaticky a my máme před sebou tzv. rozložení univerzální, jež odpovídá Bairovu prostoru. Omezíme-li zákon Λ na libovolný výběr z množiny $\{0, 1\}$ a stanovíme-li

$$\Gamma(\langle u_1, \ldots, u_k \rangle) = \sum_{n=1}^{k} \frac{u_n}{2^n},$$

získáme generátory všech reálných čísel mezi čísly 0, 1, která mají binární rozvoj. Naznačili jsme dříve, že to z Brouwerova hlediska nemohou být všechna.[28] Tento příklad nás dovede ke speciálnímu případu Brouwerovy množiny:

> Rozložení, v němž zákon Λ přiřazuje každé přípustné posloupnosti pouze konečně mnoho následníků, se říká rozložení finitární (*finitary spread*) nebo také vějíř (*fan*).

O možnost reprezentovat (všechna!) reálná čísla (nějakého intervalu) tímto finitárním způsobem se bude opírat mnoho Brouwerových pozitivních teorémů. My ale nejprve uveďme obecnější popis kontinua, kdy za C vezmeme množinu všech racionálních čísel a uvážíme nějaké jejich vyčíslení $r_1, r_2, \ldots$. Zákon Λ popíšeme tak, že pro každé $n \in \mathsf{N}_0$ platí $\langle n \rangle \in S$, a platí-li $\vec{u} = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle \in S$, pak $\vec{u} \star \langle e \rangle \in S$ tehdy a jen tehdy, když $|r_{u_k} - r_e| < \frac{1}{2^k}$. Komplementární zákon je pak stanoven jednoduše jako $\Gamma(\langle u_1, \ldots, u_k \rangle) = r_{u_k}$, čehož výsledkem je rozložení S_C generátorů (kladných) reálných čísel. Z definice rovnosti dvou generátorů (Cauchyho posloupností) $a = (a_n)_{n \in \mathsf{N}}$ a $b = (b_n)_{n \in \mathsf{N}}$, rozepsané jako:

$$a = b \rightleftharpoons (\forall m \in \mathsf{N})(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q \in \mathsf{N}, q \geq p)\left(|a_q - b_q| < \frac{1}{m}\right),$$

snadno plyne, že každé (kladné) reálné číslo lze reprezentovat nějakým výše popsaným prvkem S_C.

Definice reálného čísla skrze ekvivalenci generátorů s sebou přináší další rozštěpení ("splitsing" v Brouwerově [1923] terminologii) klasických pojmů, nejprve pojmu množiny. Reálné číslo coby množina všech ekvivalentních generátorů totiž není popsáno (generujícím) zákonem rozložení, ale (statickou) podmínkou, kterou mohou jisté předměty splnit, a upomíná tak na klasické vydělování množiny komprehenzí. Brouwer [1918, s. 3 n] v této souvislosti zavádí pojem species, která pak s ohledem na princip bludného kruhu dělí do řádů, podle toho, ve které fázi konstrukčního procesu byla vytvořena. Všechna rozložení patří mezi *species* nejnižšího řádu. K dalším komplikacím dojde s ohledem na vícero možných čtení negace.

Zde je třeba rozlišovat mezi prostým popřením $a \neq b$ rovnosti dvou generátorů, ve smyslu toho, že $a = b$ vede ke sporu, a nerovností prokázanou efektivně, nazývanou odloučeností (*Entfernung*, *apartness*) a definovanou [1919, s. 3], resp. [1925, s. 253 n], jako

$$a \# b \rightleftharpoons (\exists m, p \in \mathsf{N})(\forall q \in \mathsf{N}, q \geq p)\left(|a_q - b_q| > \frac{1}{m}\right).$$

[28] To je dáno dodatečnou podmínkou, podle níž má x binární (a obecně p-adický) rozvoj tehdy, jestliže jsme s to pro každé y tvaru $\frac{a}{2^n}$ dokázat buď, že neplatí $y > x$, nebo $y < x$. Viz Heyting [1956, s. 36].

Z $a\#b$ samozřejmě plyne $a \neq b$, ale nikoli naopak. Podobně je rozlišováno mezi pozitivním $a < b$, resp. $a \leq b$, a negativním $a \not> b$, zachycujícím pouhou nemožnost $a > b$. Z $a \not> b$ např. neplyne, že $a < b \vee a = b$, jak lze snadno ukázat vhodně zvoleným slabým protipříkladem.

V oblasti elementárních pojmů teorie množin (*species*) je podobně třeba rozlišovat negativní pojem NEPRÁZDNOSTI množiny $\neg(\forall x)(x \notin X)$ v opozici k pojmu pozitivnímu, podle něhož je množina OBYDLENÁ (*inhabited*), jestliže $(\exists x)(x \in X)$. Opět není obtížné uvést slabý protipříklad k některým klasickým tvrzením, např. že má každá neprázdná podmnožina N_0 nejmenší prvek. Množina

$$\{1\} \cup \{x \mid x = 0 \wedge A\}$$

pro nerozhodnuté tvrzení A je dokonce obydlená, její nejmenší prvek ale nelze efektivně určit. Definice množinových operací a relací $\cup$, $\cap$, $\subseteq$, $-$, $=$ zůstávají stejné, tedy alespoň co do formulace. Čteme-li $x \notin X$ ve smyslu nemožného (sporného) $x \in X$, nemusí pro $Y \subseteq X$ nutně platit

$$X = Y \cup (X - Y),$$

třeba s ohledem na protipříklad $\mathsf{Q} \subseteq \mathsf{R}$, kde $\mathsf{R} - \mathsf{Q}$ značí *species* (dokazatelně) iracionálních čísel, a kyvadlové číslo $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$:

$$a_n = \text{fragment čísla } \pi \text{ délky} \begin{cases} n & \text{když } (\forall m \leq n)\neg B(m), \\ k & \text{když } k \leq n \text{ a } k \text{ je kritické.} \end{cases}$$

O množinách X a $X' = Y \cup (X - Y)$ lze nicméně říci, že jsou si rovné v negativním slova smyslu, totiž že X nemůže obsahovat prvek, který nenáleží X', a *vice versa.* V tomto významu hovoří Brouwer [1924*c*, s. 246] O KONGRUENCI. Dále definuje následující pojmy:

> *Species* či *podspecies* $Y \subseteq X$, pro něž platí $X = Y \cup (X - Y)$, se nazývá ODDĚLITELNÉ (*abtrennbar*, *detachable*, *removable*). O X pak říkáme, že je ROZDĚLITELNÉ na dvě části Y a $X - Y$.

Nyní samozřejmě směřujeme k intuicionistické variantě věty o souvislosti kontinua, totiž že kromě množin R a $\emptyset$ neexistuje žádná jeho oddělitelná podmnožina. Lze také tušit, že oddělitelnost je jen jiný termín pro rozhodnutelnost množiny. Tento oddíl zakončeme definicí tzv. kanonického generátoru reálného čísla a náznakem důkazů dvou pomocných vět, které využijeme v oddílech příštích.

Poznamenali jsme, že obvyklé kanonické způsoby reprezentace, jimiž se v oboru reálných čísel tradičně snažíme umenšit nadbytek různých reprezentací téhož, v intuicionistickém kontinuu selhávají. Cauchyho definice čísla (číselného generátoru) je nicméně tak obecná, že se stále nabízejí, ba vnucují cesty, jak její představitele zkrotit, zejména co se týče

rychlosti konvergence, která není v definici samé nijak specifikována. To znamená, že prvky posloupnosti předtím, než se dostanou pod požadovanou mez, mohou nabývat hodnot libovolně vzdálených od limity, a to po libovolně dlouhou dobu. — Jak jsme ukázali na jednom z příkladů, lze popsat takové (ošacené) rozložení, v němž je $(n+1)$-ní člen posloupnosti racionálních čísel od členu n vzdálen méně než o $\frac{1}{2^n}$, takže posloupnost konverguje relativně rychle. Volba dalších členů je ale neomezená, takže se zcela jistě jedná o rozložení nefinitární. To bychom chtěli v případě kanonických generátorů změnit. Základní definice je proto následující:

> KANONICKÝM GENERÁTOREM je generátor reálného čísla tvaru $(\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$, kde $a_n \in \mathsf{N}_0$ a platí $\left|\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Nyní potřebujeme dokázat větu:

> Každý prvek $x \in \mathsf{R}$ má kanonický generátor.

Důkaz: Pro dané $n \in \mathsf{N}$ najdeme k $x = (x_m)_{m\in\mathsf{N}}$ nejprve z definice Cauchyho posloupnosti x_k takové, že $|x - x_k| < \frac{1}{2^{n+3}}$. Nyní specifikujeme $a_n \in \mathsf{N}_0$ takové, že $\left|x_k - \frac{a_n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, což v součtu znamená, že

$$\left|x - \frac{a_n}{2^n}\right| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^n}.$$

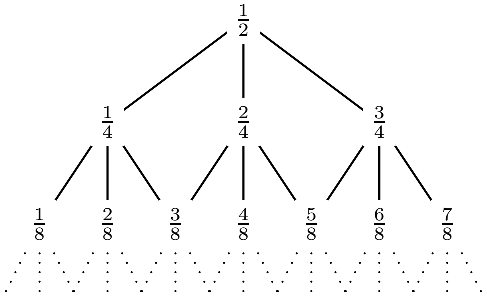
Tento vztah využijeme i v dalších důkazech. Zopakujeme-li předvedený postup pro každé $n \in \mathsf{N}$, získáme generátor $a = (\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ takový, že $a = x$. Navíc platí $\left|\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\right| < \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^n} + \frac{5}{2^4}\frac{1}{2^n} = \frac{15}{16}\frac{1}{2^n}$, což ale již — vzhledem k tvaru porovnávaných členů posloupnosti — znamená, že $\left|\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. To jsme chtěli dokázat. □

K pochopení předchozího i následujícího důkazu možná pomůže následující vizualizace: Konstrukce kanonického generátoru nás vybízí představovat si reálnou osu rozdělenu do políček o velikosti $\frac{1}{2^n}$ s rostoucí jemností pro každý krok n. V prvním kroku si vybereme některý z celočíselných násobků $\frac{1}{2}$, v $(n+1)$-ním kroku se můžeme pohnout přesně o $\frac{1}{2^{n+1}}$ vpravo či vlevo, případně zůstat stát. To znamená, že pro fixované x_n jsou vždy k dispozici (nejvýše) tři možnosti volby x_{n+1}. Z toho již dostáváme následující teorém:

> Každý uzavřený interval kontinua lze reprezentovat vějířem.

Důkaz: Vezměme daný interval $[a, b]$ a sestrojme kanonickou formu jeho okrajů $(\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$, $(\frac{b_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ jako v předchozím důkazu. Můžeme předpokládat platnost vztahu $a_n \leq b_n$, neboť kdyby $a_m > b_m$ pro nějaké m, platilo by díky $\left|b - \frac{b_m}{2^m}\right| < \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^m}$ i $\left|b - \frac{a_m}{2^m}\right| < \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^m}$, tj. b_m by mohlo být v konstrukci generátoru skrze a_m bez újmy na obecnosti nahrazeno. Kýžené rozložení konstruujme následovně: Platí $\langle x_1 \rangle \in S$ pro všechna

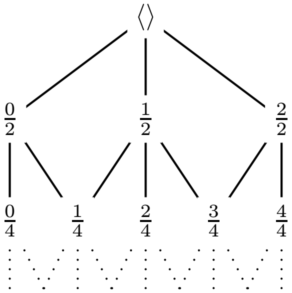
$a_1 \leq x_1 \leq b_1$; těch je evidentně pouze konečně. Volbu x_{n+1} opakujeme pro každé n, přičemž pro pevné x_n jsme, jak bylo zmíněno, omezeni nejvýše třemi možnostmi a vztahem $a_{n+1} \leq x_{n+1} \leq b_{n+1}$. Nějaká možnost zjevně existuje vždy. Komplementární zákon má podobu



Obrázek 7.1: Kanonické rozložení intervalu $[0, 1]$

$\Gamma(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \frac{x_n}{2^n}$. Výsledkem je ošacené rozložení S_C pro množinu C čísel tvaru $\frac{x_n}{2^n}$, kde $a_n \leq x_n \leq b_n$. Poslední vztah triviálně zajišťuje, že každý prvek S_C reprezentuje nějaký prvek v $[a, b]$. Máme-li naopak prvek $x \in [a, b]$, můžeme předpokládat jako dříve, že má kanonický rozvoj $(\frac{x_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ s podmínkou $a_n \leq x_n \leq b_n$. Tím pádem koinciduje s nějakým prvkem S_C. □

Uvážíme-li pro ilustraci speciální případ intervalu $[0, 1]$, máme před sebou ternární rozložení, v němž je uzlu $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ pro $0 < x_n < 2^n$ přiřazena trojice uzlů $\langle x_1, \ldots, x_n, 2x_n - 1\rangle$, $\langle x_1, \ldots, x_n, 2x_n\rangle$, $\langle x_1, \ldots, x_n, 2x_n + 1\rangle$. Tuto situaci zachycuje obrázek 7.1. Ve skutečnosti má ale výše popsané



Obrázek 7.2: Jiné kanonické rozložení intervalu $[0, 1]$

rozložení ještě okraje odpovídající číslům 0 a 1, z nichž vede vždy po dvou hranách k uzlům ohodnoceným $\frac{0}{2^n}$ a $\frac{1}{2^n}$, resp. $\frac{2^n-1}{2^n}$ a $\frac{2^n}{2^n}$; v kořeni stromu je prázdná posloupnost $\langle\rangle$. To zachycuje obrázek 7.2. Dříve uvedený ternární vějíř by mohl zjevně k reprezentaci intervalu sloužit také, popsaná konstrukce by ale musela být revidována.[29]

7.5 Princip spojitosti a závorová indukce

V základech intuicionistické matematiky stojí několik silných principů, které Brouwer objevil a aplikoval. My se zde omezíme na dva nejelementárnější, a to princip spojitosti a speciální princip indukce na stromech, tzv. indukce závorové. Princip spojitosti, jemuž se také někdy říká princip Brouwerův, jsme přitom už částečně poznali a při té příležitosti poznamenali, že se v něm zvláště výrazně odráží Brouwerovo rozhodnutí pracovat s Cantorovými libovolnými posloupnostmi 'jinak', totiž jako posloupnostmi výběrovými. Není tedy divu, že právě na tomto pojmu leží tíha či zásluha totálního rozchodu intuicionismu s klasickou matematikou, tedy nikoli jen pouhého zdržení se jistých nespolehlivých úsudků, jak se tomu děje v některých odnožích konstruktivismu.

Princip spojitosti, explicitně formulovaný Heytingem [1930*b*], vyjadřuje základní charakteristiku výběrových posloupností, totiž že se s nimi bude pracovat vždy na bázi nějakého jejich konečného úseku. Zavedeme-li značení $\alpha \in \vec{u}$ ve významu toho, že má posloupnost α počáteční úsek $\vec{u}$, neboli konvenci

$$\alpha \in \vec{u} \rightleftharpoons (\exists n)(\bar{\alpha}(n) = \vec{u}),$$

můžeme PRINCIP SPOJITOSTI formulovat třeba takto:

$$\mathsf{CP} \quad (\forall\alpha)(\exists n)R(\alpha, n) \to (\forall\alpha)(\exists m, n)(\forall\beta \in \bar{\alpha}(m))R(\beta, n),$$[30]

ve smyslu tvrzení, že přiřazuje-li nějaký vztah R každé výběrové posloupnosti (nějakého rozložení) nějaké číslo, pak k dané posloupnosti α existuje nějaký její počáteční úsek $\bar{\alpha}(m)$, na jehož základě se tak děje, tj. všechny posloupnosti β téhož počátečního úseku jsou ve vztahu R k témuž číslu.

Nejprve se nabízí vysvětlit název uvažovaného principu, což je relativně přímočaré. Zobrazení $f : X_1 \to X_2$ topologického prostoru $\langle X_1, T_1\rangle$ do topologického prostoru $\langle X_2, T_2\rangle$ nazýváme SPOJITÉ V BODĚ $x \in X_1$ právě tehdy, když ke každému okolí $V(f(x)) \in T_2$ existuje okolí $U(x) \in T_1$ takové, že $f[U(x)] \subseteq V(f(x))$. O f říkáme, že je spojitá na prostoru $\langle X, T\rangle$, jestliže je spojitá v každém jeho bodě. — Uvažujeme-li nyní funkci z topologického prostoru A, daného nějakým rozložením,

[29] Definice kanonického generátoru a oba důkazy byly převzaty z Heyting [1956, s. 41 nn]. V modifikaci je lze najít in Dummett [1977, s. 84 nn].

[30] Principu v této verzi, která odpovídá původní Heytingově formulaci, se někdy říká princip lokální spojitosti, čímž se odlišuje od verzí obecnějších. O nich a jejich vztazích lze získat přehled in Troelstra & van Dalen [1988, s. 206 nn].

např. Bairovým prostorem N^N, je zřejmé, že o okolích jeho prvku α můžeme hovořit v slovníku přirozených čísel, kdy každé n určuje množinu prvků β společného počátečního úseku $\bar{\alpha}(n)$, což jsou všechna β taková, že $d(\alpha, \beta) < \frac{1}{2^n}$. Uvažujeme-li speciální případ funkcí z A do N, je požadovaná spojitost takové funkce f dána jednoduše tím, že ke každému $f(\alpha) = n \in \mathsf{N}$ dokážeme najít m takové, že $f(\beta) = n$ pro každé $\beta \in \bar{\alpha}(m)$, což ale není nic jiného, nežli obsah CP pro jednoznačné (funkcionální) R. Modifikací této úvahy dostaneme větu:

Každá totální funkce $f : \mathsf{R} \to \mathsf{N}$ je spojitá.

Důkaz: Modifikace je založena na možnosti transformovat prvky N^N na prvky R způsobem g, který zaručuje spojitost funkce f na R za předpokladu, že je $g \circ f$ spojitá na N^N. Jelikož z předvedené úvahy plyne, že funkce $g \circ f : \mathsf{N}^\mathsf{N} \to \mathsf{N}$ spojitá je, je spojitá i f.[31] □

To je první a nejjednodušší případ pozitivního tvrzení intuicionistické matematiky, které je v rozporu s matematikou klasickou. Jelikož kontinuum R tvoří souvislý topologický prostor, tj. nelze je rozdělit na dvě disjunktní otevřené neprázdné (obydlené) množiny,[32] dostáváme navíc větu:

Každá totální funkce $f : \mathsf{R} \to \mathsf{N}$ je konstantní.

Důkaz: Hodnoty funkce f v N jsou určeny otevřenými okolími v R, tj. počátečními úseky daných posloupností. Kdyby tedy f konstantní nebyla, bylo by možné rozložit R do systému nejméně dvou otevřených disjunktních neprázdných množin podle různých hodnot, kterých f v N nabývá. Jelikož sjednocením množiny otevřených množin je opět otevřená množina, získali bychom tak rozklad kontinua na dvě neprázdné obydlené množiny, což je v rozporu s předpokladem. □

Jako korolár k tomuto tvrzení zároveň dostáváme fakt, že je R nerozdělitelné na dvě části A, $\mathsf{R} - A$ jiné než R a $\emptyset$, neboť takovéto rozdělení by s sebou neslo existenci totální funkce $f : \mathsf{R} \to \{0, 1\}$ takové, že

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \in A, \\ 0 & \text{když } x \notin A, \end{cases}$$

která není konstantní. Toto vše mělo ale spíše ilustrativní význam, neboť jsme jednak některé kroky důkazů pouze naznačili, jednak nevíme,

[31] Detaily in Bridges & Richman [1987, kap. 5].

[32] Bairův a Cantorův prostor jsou ovšem TOTÁLNĚ NESOUVISLÉ, tj. nemají žádné souvislé podmnožiny kromě množiny prázdné a všech jednoprvkových.

zda některý z předpokladů není intuicionisticky neakceptovatelný. Uvedená tvrzení dostaneme záhy jako speciální případy silnější verze věty o spojitosti funkcí, totiž z R do R, jejíž důkaz povedeme výhradně podle Brouwerových představ.

K tomu je zapotřebí druhý významný princip, s nímž se Brouwer potýkal mnoho let, ačkoli se z klasického hlediska jedná o svého druhu ‘trivialitu’, totiž konverzi Königova lemmatu a zobecněný princip indukce pro stromy, tj. Brouwerova rozložení. Důvodem byla právě snaha podat skutečně ‘intuitivní’ důkaz tohoto centrálního výsledku. — Jak víme, Königovo lemma je tvrzení, podle něhož má konečně se větvící strom v případě nekonečně mnoha uzlů nekonečnou větev. To lze eventuálně formulovat jako implikaci:

Neexistuje-li horní mez na délku větví konečně se větvícího stromu, je alespoň jedna z jeho větví nekonečná.

Jak jsme rovněž zmínili, je toto tvrzení přes značnou míru evidence z hlediska efektivní, a tedy i intuicionistické matematiky nezdůvodněné, neboť nám v obecném případě neposkytuje návod, jak příslušnou nekonečnou větev zkonstruovat, tj. nedává nám vhodný substituent N pro postulované $(\exists x)A(x)$. Provedeme-li však klasickou konverzi lemmatu, získáme implikaci:

Jestliže konečně se větvící strom neobsahuje nekonečnou větev, tj. má-li každá jeho větev nějakou horní mez, existuje jedna horní mez společná pro všechny jeho větve.

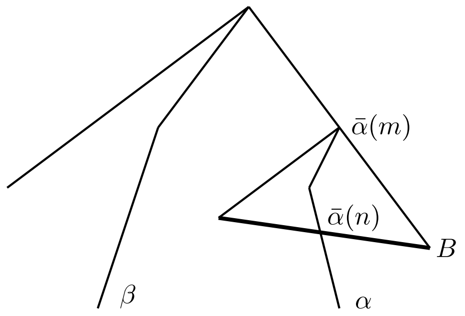
Ta se z efektivního hlediska zdá být uspokojivá, neboť jsou-li všechny větve konečně se větvícího stromu konečné, není problém změřit jejich délky a vybrat maximum. Chceme-li nyní přenést tento tvar Königova lemmatu do Brouwerova pojmového rámce, tj. nahradit pojem konečně větvícího se stromu pojmem vějíře, narazíme nejprve na problém, že vějíř byl coby speciální případ rozložení od počátku definován jako nekonečný strom, tj. všechny jeho prvky (větve) jsou nekonečné. Proto je zapotřebí zavést několik pomocných rozlišení:

Species B uzlů rozložení S se nazývá ZÁVOROU UZLU $\vec{u} \in S$ (*bar*), jestliže pro každé $\alpha \in S$ takové, že $\alpha \in \vec{u}$, platí, že $\bar{\alpha}(n) \in B$ pro nějaké $n \in \mathsf{N}$. Alternativně říkáme, že *species* B uzel $\vec{u}$ UZAVÍRÁ (*bars*). Jestliže *species* B uzavírá uzel $\langle\rangle$, říkáme, že je B ZÁVOROU ROZLOŽENÍ.

Především pro větší názornost můžeme zavést další pomocné pojmy:

CESTAMI rozložení S budeme rozumět jeho prvky jak ve smyslu α, β, ..., tj. cesty nekonečné, tak ve smyslu $\vec{u}$, $\vec{v}$, ..., tj. cesty konečné. Řekneme, že *species* B PROTÍNÁ cestu c (v bodě n), jestliže v něm leží nějaký její počáteční fragment (délky $\leq n$). Cesta c MÍJÍ *species* B, jestliže v něm neleží žádný její fragment.

Tyto situace jsou ilustrovány v obrázku 7.3, v němž cesta α protíná *species* B v bodě n, cesty $\bar{\alpha}(m)$ a β je míjí a B sama je závorou uzlu $\bar{\alpha}(m)$, nikoli celého rozložení. Z toho je především zřejmé, že závora rozložení



Obrázek 7.3: Závora (uzlu) rozložení

protíná všechny jeho nekonečné cesty, závora uzlu všechny nekonečné cesty, které jím procházejí. Původní, nekonstruktivní varianta Königova lemmatu se v této poloobrazné řeči rovná tvrzení, že *species* B vějíře, jež míjí konečné cesty libovolných konečných délek, míjí i nějaká cesta nekonečná. Konstruktivní varianta lemmatu pak vypadá následovně:

$$\mathsf{FT} \quad (\forall\alpha)(\exists n)(\bar{\alpha}(n) \in B) \to (\exists m)(\forall\alpha)(\exists n \leq m)(\bar{\alpha}(n) \in B),$$

a obvykle nese název VĚTA O VĚJÍŘI (*fan theorem*), kdy předpokládáme, že se kvantifikátor $(\forall\alpha)$ implicitně vztahuje k prvkům nějakého vějíře a B je oddělitelné (rozhodnutelné) *species.*[33] Všimněme si, že tvrzení můžeme také formulovat tak, že pro závoru B vějíře existuje bod m, v němž byla závorou protnuta každá cesta této a větší délky. Tím pádem lze ale obecnou závoru vějíře nahradit nějakou závorou konečnou, což se rovná tvrzení, že příslušný vějíř představuje kompaktní prostor, neboť ke každému pokrytí (systému uzlů reprezentujících otevřené množiny a protínajících každou nekonečnou cestu) existuje konečné podpokrytí! Tím je dodatečně osvětleno, proč je Cantorův prostor (2^{N}) na rozdíl od prostoru Bairova $(\mathsf{N}^{\mathsf{N}})$ kompaktní. Lokální kompaktnost R plyne z výše ukázané reprezentovatelnosti uzavřeného intervalu vějířem.

[33] Existují opět různé varianty věty o vějíři s různými dodatečnými požadavky, jimiž se ale zabývat nebudeme. Podrobnosti in Troelstra & van Dalen [1988, s. 217 nn]. Na těchto podmínkách ovšem závisí kompatibilita věty o vějíři s dalšími principy konstruktivní matematiky, např. Churchovou tezí. Viz také oddíl 7.9.

Věta o vějíři se (zatím pod názvem "hlavní vlastnost konečných množin") objevuje v Brouwerově článku *Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist* [1924*b*], a to jako produkt obecnějšího teorému, jenž je znám jako věta o závoře (*bar theorem*). Oba názvy jsou ovšem až poválečné, z článku [1954]. Obsah věty tvoří zdůvodnění specifické verze matematické indukce na rozloženích (stromech), přičemž jak zmíněný článek [1924*b*], tak jeho rozpracování [1927] pro *Mathematische Annalen* svědčí o tom, že jí v hierarchii intuicionistických principů přísluší mimořádné místo. Brouwerovy opakované a velmi originální způsoby důkazu věty[34] již samy poukazují k faktu, že se zde, stejně jako o několik desítek let dříve v případě rekurzivního teorému, naprosto změnila pravidla hry. Stejně jako u rekurzivního teorému je navíc předmětem důkazu něco velmi elementárního, totiž oprávněnost induktivního zdůvodnění. To by na jednu stranu mohlo vést k závěru, že jako u Dedekinda a Frega, kteří chtěli rekurzivní definici nahradit definicí explicitní, nejsou Brouwerova východiska čistě konstruktivní. Brouwerův delší argument je nicméně důkazově-teoretický, má tedy stejný základ jako Hilbertova idea metamatematiky,[35] ovšem v rozšíření o transfinitní metody Gentzenovy, jinými slovy: balancuje na hraně toho, co se obvykle počítá ke konstruktivním metodám. Toto téma ještě rozvedeme v příští kapitole.

Obsahem VĚTY O ZÁVOŘE je v její intenzionální formulaci princip, podle něhož z toho, že prvky závory nějakého rozložení S mají vlastnost A, plyne, že ji má také prázdná posloupnost $\langle\rangle$, jestliže je A dědičná směrem ke kořeni. Dědičností vlastnosti zde rozumíme okolnost, podle níž z toho, že ji mají všichni bezprostřední následníci uzlu, plyne, že ji má i on. Úhrnem tedy dostáváme:

$$\mathsf{BI} \quad B \subseteq A \wedge [(\forall k)(\vec{u} \star \langle k\rangle \in A) \to \vec{u} \in A] \to \langle\rangle \in A,$$

kde B je závora, kvantifikátor $(\forall k)$ je přirozeně omezen těmi uzly, které přicházejí v úvahu, a na B jsou kladené případné další požadavky.[36] Úsudkový princip, který je v této formuli vyjádřen, se nazývá ZÁVOROVÁ INDUKCE (*bar induction*) a obvykle se mezi ním a teorémem, který tvrdí jeho platnost (*bar theorem*), nerozlišuje. Nejprve ukážeme, jak lze BI použít při důkazu FT.

[34] Různé verze argumentu lze kromě zmíněných článků [1924*b*] a [1927] najít v komentáři k článku [1924*a*], Brouwerových berlínských přednáškách [1992] z roku 1927 a konečně článku [1954].

[35] Není bez zajímavosti, že podle Brouwerova [1928, s. 375 n] vyjádření pochází rozlišení formalistické matematiky a (meta)matematiky, která ji 'intuitivně' zkoumá, tedy jakési "matematiky druhého řádu", z jeho pera, a bylo tak i roku 1909 sděleno v ústní konverzaci Hilbertovi, který je, podle Brouwera, postupně dovedl *ad absurdum.*

[36] Tato omezení jsou významná a záleží na nich kompatibilita věty s dalšími intuicionistickými principy. Z nedostatku prostoru čtenáře odkazuji na knihy Troelstra & van Dalen [1988, s. 229 nn] a Dummett [1977, s. 54 nn]. Brouwer ovšem uvažuje princip pouze ve výše uvedené holé formě.

Důkaz: Mějme závoru B vějíře S, tj. platí $(\forall\alpha)(\exists n)(\bar{\alpha}(n) \in B)$, a zvolme A tak, že

$$\vec{u} \in A \rightleftharpoons (\exists m)(\forall\alpha \in \vec{u})(\exists n \leq m)(\bar{\alpha}(n) \in B).$$

Je zřejmé, že $B \subseteq A$. Dokážeme-li nyní dědičnost, dostaneme $\langle\rangle \in A$, a tedy i požadovaný závěr FT. Předpokládejme tedy, že $(\forall k)(\vec{u} \star \langle k\rangle \in A)$ v omezení na $\vec{u} \star \langle k\rangle$ z S. Pro každé k nyní existuje nějaké $m(k)$ takové, že $(\forall\alpha \in \vec{u} \star \langle k\rangle)(\exists n \leq m(k))(\bar{\alpha}(n) \in B)$. Těchto k, a tedy i $m(k)$, je ale jen konečně, lze tedy vybrat jejich maximum p, pro něž již platí $(\forall\alpha \in \vec{u})(\exists n \leq p)(\bar{\alpha}(n) \in B)$. To znamená, že $\vec{u} \in A$, a my jsme hotovi. Všimněme si, že jsme při definici $m(k)$ použili (velmi slabou a věcně nepodstatnou) verzi axiomu výběru, což má v tomto případě hlavně didaktické důvody. □

Podstata Brouwerova důkazu samotné věty o závoře je důkazově-teoretická, přesně v duchu intuicionistické interpretace implikace, vyskytující se v BI:

"$A \to B$" platí, jsme-li důkaz A s to převést na důkaz B.

Nejprve je ovšem nutno vyjasnit, co je to důkaz. Podle Brouwera se jedná o strukturu, která má — stejně jako rozložení — charakter stromu a může být, v rozporu s finitistickou doktrínou Hilbertovou (alespoň v některém z jejích čtení) a tradicí založenou Fregem, i nekonečná. Obrátíme-li znázorňování struktury stromů tak, jak je to přirozené, tj. kořenem dolů s větvemi rostoucími nahoru, můžeme odpovídajícím způsobem zaznamenávat i úsudková pravidla, přičemž kandidátem na prototyp pravidla v uvažovaném rozšířeném smyslu bude

$$\frac{A(1), A(2), \ldots}{(\forall x)A(x)},$$

jímž se coby tzv. ω-PRAVIDLEM budeme ještě zabývat později. Z toho již přirozeně plyne koncepce důkazu jako nekonečného stromu, s uzly odpovídajícími nekonečně mnoha premisám $A(1)$, $A(2)$, ... Nutno ale předem podotknout, že v Brouwerově pojetí jsou na tyto premisy kladeny dodatečné požadavky efektivní zvládnutelnosti, tj. nemůže se jednat o nekonečnou skupinu zcela náhodnou. K tomu se ještě vyjádříme později v souvislosti s interpretacemi Gödelova důkazu. Významným rysem ω-pravidla oproti dosud uvažovaným přechodům je také jeho specificky aritmetický charakter.

V aplikaci Brouwerova pojetí důkazu na BI je nyní třeba ukázat, jak z toho, že je B závorou rozložení dědičné vlastnosti A, dostat důkaz tvrzení, že $\langle\rangle \in A$. Jelikož Brouwerova argumentace není ani zvláště

průhledná, ani přesvědčivá a celý argument je zpravidla uváděn jako kuriozita, případně jako předchůdce Gentzenových transfinitních důkazových metod, zmíníme pouze některé jeho klíčové body. Nejprve zaveďme zkratku $\vec{u} \hookrightarrow B$ ve významu "B je závora $\vec{u}$". Nyní předpokládejme, že máme důkaz $\langle\rangle \hookrightarrow B$, tj. faktu, že je B závorou rozložení. Podle Brouwera v něm mohly být použity pouze inference trojího typu, totiž

$$(\eta)\quad \frac{\vec{u} \in B}{\vec{u} \hookrightarrow B},$$

$$(\zeta)\quad \frac{\vec{u} \hookrightarrow B}{\vec{u} \star \langle k\rangle \hookrightarrow B},$$

$$(\mathcal{F})\quad \frac{\vec{u} \star \langle 0\rangle \hookrightarrow B, \vec{u} \star \langle 1\rangle \hookrightarrow B, \ldots}{\vec{u} \hookrightarrow B},$$

kdy v inferencích typu $(\mathcal{F})$ opět předpokládáme, že se v premisách vyskytují uzávěry všech přímých následníků uzlu $\vec{u}$, tj. uvažujeme pouze relevantní případy formulí $\vec{u} \star \langle k\rangle \hookrightarrow B$.

V dalším kroku Brouwer argumentuje, že všechny inference typu (ζ) jsou z důkazu eliminovatelné, a to indukcí podle délky uzlu, k důkazu jehož uzavřenosti byly použity: Závěrem (kořenem) důkazu je tvrzení $\langle\rangle \hookrightarrow B$. Na ně lze (v netriviálním případě $\langle\rangle \notin B$) usoudit pouze aplikací pravidla typu $(\mathcal{F})$ na tvrzení již dokázaná. To ale znamená, že všechna tvrzení $\langle k\rangle \hookrightarrow B$ pro k libovolné přípustné musela být nějak dokázána bez použití pravidla (ζ). Induktivním opakováním tohoto argumentu pro posloupnosti délky 2, 3, ... dokážeme eliminovat aplikaci pravidla (ζ) z celého důkazu, v němž se pak tedy vyskytují pouze inference (η) a $(\mathcal{F})$. Jelikož podle předpokladu platí $B \subseteq A$, můžeme nyní každou inferenci (η) v důkazu $\langle\rangle \hookrightarrow B$ nahradit přechodem

$$\frac{\vec{u} \in B}{\vec{u} \in A},$$

tj. zcela korektně přepíšeme $\vec{u} \hookrightarrow B$ na $\vec{u} \in A$. Každou $(\mathcal{F})$-inferenci přepíšeme dále na

$$\frac{\vec{u} \star \langle 0\rangle \in A, \vec{u} \star \langle 1\rangle \in A, \ldots}{\vec{u} \in A},$$

což je korektní díky předpokladu dědičnosti A. Jelikož se jiné nežli uvedené inference podle předpokladu v důkazu $\langle\rangle \hookrightarrow B$ nevyskytují, získali jsme touto transformací korektní odvození tvrzení $\langle\rangle \in A$.[37]

[37] Důkaz v této formě lze najít in Dummett [1977, s. 68 nn] a v principu také in Heyting [1956, s. 43 n]. Podkladem jsou zde Brouwerovy články [1927] a [1954].

Díváme-li se na větu o závoře jako na implikaci, v jejímž antecedentu se vyskytuje pouze tvrzení “B je závora” a v konsekventu (mírně modifikované) zbylé podmínky, lze ji také chápat jako popis dvou způsobů definice množiny uzlů a tvrzení jejich ekvivalence (druhá implikace je triviální). První množina, značme ji C, je tvořena těmi uzly rozložení, které jsou uzavřeny závorou B, ale zatím ji míjí nebo ji právě protnuly. Na názorné úrovni jim odpovídá jednoduše strom pod závorou B včetně. Druhá je popsána induktivně jako sjednocení D systému množin B_n, kde: (1) B_0 obsahuje ty uzly, které jsou v B, (2) B_{n+1} obsahuje uzel $\vec{u}$, jestliže $\vec{u} \star \langle k \rangle \in B_n$ pro každé k přípustné. Pokud se, jako Brouwer, nějak přesvědčíme, že C a D koincidují a že v případě vějíře lze D navíc získat konečně mnoha iteracemi B_n, musí existovat nějaké m takové, že $\langle\rangle \in B_m$, což vede přímo k důkazu věty o vějíři, tj. tvrzení, že každá nekonečná cesta vějíře protne B nejpozději v bodě m. V případě obecného rozložení nelze D získat konečně mnoha kroky a k důkazu věty o závoře je zapotřebí užít transfinitní (leč spočetné) ordinály, jak to později udělá Gentzen ve svých důkazech bezespornosti aritmetiky.[38]

7.6 Brouwerovo kontinuum

Brouwer byl na větu o závoře a její aplikaci ve větě o vějíři velmi pyšný, což je pochopitelné, neboť umožňuje odvození silných intuicionistických teorémů, nekompatibilních s matematikou klasickou. Dalším důvodem mohl být fakt, že jeho důkaz věty o vějíři [1924*b*] předcházel důkazu Königova lemmatu [1926], a mohl tak být intuicionistům dokladem, že jejich výsledky nevznikají pouhým osekáváním, případně deformací etablovaných výsledků klasické matematiky. Sloučíme-li nyní princip spojitosti a větu o vějíři do poučky, které se někdy v literatuře, viz třeba Heyting [1956, s. 42], také říká věta o vějíři, získáme podstatně silnější tvrzení:

$$\mathsf{FC} \quad (\forall\alpha)(\exists n)R(\alpha,n) \to (\exists m)(\forall\alpha)(\exists n)(\forall\beta \in \overline{\alpha}(m))R(\beta,n),$$

v němž implicitně kvantifikujeme přes prvky α, β, ... vějíře. Věta říká, že k relaci R, která každý prvek α vějíře spojuje s nějakým přirozeným číslem nebo čísly, existuje m takové, že lze některé z takto přiřazených čísel vypočíst již na základě úseku délky m, a to pro libovolné α. Bez zbytečných okolků nyní přejděme k důkazu (lokální verze) dlouho ohlašované VĚTY O SPOJITOSTI TOTÁLNÍ FUNKCE NA KONTINUU:

> Funkce $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ definovaná v každém bodě uzavřeného intervalu je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

[38] Uvedené čtení důkazu, spolu s četnými odkazy na Brouwerovy původní texty, propaguje Kleene & Vesley [1965, s. 43 nn]. Užitečné poznámky poskytují Bridges & Richman [1987, s. 110 nn].

Důkaz: Nejprve ale ještě pro jistotu oprašme definici stejnoměrné spojitosti, která v aplikaci na metrické prostory popisuje zobrazení $f : X_1 \to X_2$ prostoru $\langle X_1, d_1 \rangle$ do prostoru $\langle X_2, d_2 \rangle$ jako STEJNOMĚRNĚ SPOJITÉ, jestliže

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in X_1)[d_1(x_1,x_2) < \delta \to d_2(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon].$$

Nyní již k samotnému důkazu. Podle dříve dokázaného tvrzení víme, že uzavřený interval lze reprezentovat nějakým vějířem S_C. Uvažujme jeho nahou verzi S. Jejím prvkům α funkce f přiřazuje nějaký generátor a v kanonickém tvaru $(\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$. Pro fixní p definujme vztah R jako $F(\alpha) = a_p$, tj. jako zobrazení S do N. Podle FC musí existovat $m(p) \in \mathsf{N}$ takové, že pro každé $\alpha \in S$ lze hodnotu $F(\alpha) = a_p$ vypočíst na základě úseku $\bar{\alpha}(m(p))$. Máme-li nyní nějaká $\beta, \gamma \in S$ taková, že $d(\beta,\gamma) < \frac{1}{2^{m(p)}}$, shodují se z definice d na úseku délky $m(p)$, což znamená, že platí $F(\beta) = F(\gamma)$. Jelikož podle naší konstrukce kanonického generátoru platí pro $a = (\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ vztah $d(a, \frac{a_n}{2^n}) < \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^n}$, dostáváme pro $f(\beta) = b = (\frac{b_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ a $f(\gamma) = c = (\frac{c_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ a dokázané $b_p = c_p$ vztah $d(b,c) < \frac{5}{4}\frac{1}{2^p}$, což ale znamená, že jsme hotovi, neboť pro dané p dokážeme najít $m(p)$ tak, že z $d(\beta,\gamma) < \frac{1}{2^{m(p)}}$ plyne $d(f(\beta), f(\gamma)) < \frac{5}{4}\frac{1}{2^p}$ pro libovolné β, $\gamma \in S$. □

Z věty o spojitosti totálních funkcí dostáváme jako korolár větu, že každé oddělitelné *podspecies* uzavřeného intervalu je buďto prázdné, nebo identické s intervalem samotným, a to výše naznačeným způsobem, totiž uvažováním příslušné charakteristické funkce a postřehem, že jinak nemůže být spojitá. Intuicionistické kontinuum, jak dokázal Brouwer [1927, s. 66], je takto nerozdělitelné, tedy alespoň v tom smyslu, který onomu pojmu dal. — Podrobné či alespoň podrobnější předvedení některých Brouwerových pojmů a výsledků v předchozích oddílech snad dostatečně ukázalo, že se v jeho intuicionismu skrývá na jednu stranu více, než má za to čtenář, jenž se s jeho principy seznámil především skrze Heytingovo oslabení klasické logiky, na druhou stranu méně, než si obvykle myslí Brouwerovi stoupenci.

Weyl, jenž po seznámení s Brouwerem oficiálně opustil svou vlastní koncepci predikativní analýzy, podanou ve spisu *Kontinuum* [1918],[39] a slavnostně se manifestem *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* [1921] připojil k intuicionistickému táboru, neboť [1921, s. 158] “Brouwer — to je revoluce!”, popsal Brouwerovo kontinuum neobyčejně barvitě jako “médium svobodného vzniku” (*Medium freien Werdens*),

[39] Stručný rozbor Weylova počinu lze najít in Mancosu [1998]. Podrobnou studií je Feferman [1988] a Fefermanova a Scholzova kapitola in Hendricks *et al.* [2000].

pohybu a změny. Je to tekoucí kaše (*fliessender Brei*), z níž jsou jednotlivé body vybírány, ona se z nich ale neskládá, jak se domnívá atomistická koncepce [1921, s. 177]: "'bod' je idea *limity* dělení rozkládajícího se *ad infinitum*", a jeho existence, resp. existence všech bodů přímky, je potenciálního, nikoli aktuálního charakteru. A dále [1921, s. 173]: "Pravé kontinuum je něco souvislého v sobě a nemůže být rozděleno na odlišné části; to odporuje jeho povaze." Vedle předpovězené spojitosti každé funkce na kontinuu tu tak máme i Aristotelovu původní nauku o spojitosti kontinua, podle níž dvě věci nemohou být souvislé, jestliže hranice, jíž se dotýkají, není jedna a tatáž.

To vše jsou ale jen slova, která mohou být snad ještě ospravedlnitelná v Aristotelově 'naivní', preteoretické dikci, nikoli však na pozadí Brouwerových technických definicí, které vycházejí z definicí Cantorových, především tedy z jeho pojmu posloupnosti a množiny, při důvtipné změně způsobů, jak s nimi zacházet. Tyto způsoby jsou nicméně stále způsoby atomistického kontinua, jež se pokoušíme učinit spojité zmrazením jistých rozdílů. Z teoreticko-filosofického hlediska je proto odchylka od Cantora nepatrná, neboť vše zůstává ve vzduchu metafyzických postulátů a subjektivních rozhodnutí. Z hlediska matematicko-praktického má potom Cantorova teorie jasně navrch, neboť přes původní proklamace o nezávislosti množin na jazyce respektuje jednoduchá inferenční pravidla, a činí tak příslušnou oblast do velké míry přehlednou a kontrolovatelnou.

To samozřejmě nemění nic na dříve zmíněné fiktivnosti některých partií Cantorova ráje, pramenící z toho, že nám chybí specifikace jmen jeho obyvatel, tj. potenciálních reprezentací, a s nimi spojená kritéria identity. Cantor avšak alespoň nepřímo, skrze užité úsudkové principy (vyloučený třetí), předstírá, že jeho svět nějaké objektivní obyvatele má, tj. že existuje obor splňující jím navrženou sadu postulátů. K tomu v důsledku potřebuje výpomoc Hilbertova axiomatismu a jeho implicitní definice. Zdá se, že to vše má na mysli také Wittgenstein [1983, s. 33, § 174], když říká:

> Teorie množin staví na prázdném symbolismu, a tedy nesmyslu. Jako kdyby v logice existovalo něco, co nemůžeme vědět, co ale může být věděno.

Naše pointa, na rozdíl od té Wittgensteinovy, spočívá v tom, že "prázdný symbolismus" je pořád přece jen symbolismus, a tudíž lepší než jakákoli mentální gymnastika. Brouwerova systematická nechuť podat jakékoli závazné pravidlo se nám v tomto kontextu jeví jakožto větší ze dvou zel, neboť je nakonec cestou *difúzních* předmětných oborů a komplikovaných úsudkových principů, které jsou pro svůj *ad hoc* charakter obtížně, pokud vůbec následovatelné. Intuicionistická matematika se tak svým

pohrdáním pro jazyk a zálibou v mentálních konstrukcích stává intelektuálním dobrodružstvím několika mála matematiků, nikoli veřejným statkem, v intencích rozdílu mezi všeobecně oblíbenou hrou s jasnými, transparentními pravidly (šachy) a lokálním rituálem, vázaným na nějaký užší typ spřízněnosti účastníků.

Rozdíl potenciálního a aktuálního nekonečna je přitom příliš vágní na to, aby mohl sám o sobě osvětlit specifika klasického a konstruktivního přístupu k matematice, natož pak aby zachytil rozdíly spojitého a diskrétního. Zcela nezávisle na tom, co o nekonečnu říkají filosofové minulosti, platí, že nekonečno známe pouze skrze jeho konečný popis. To z něho ovšem nedělá nekonečno nedokončené, potenciální, neboť v řeči běžně užíváme a zjevně potřebujeme užívat odkaz k (aktualizovanému) *celku* předmětů nějakého typu, tedy např. ke *všem* bodům přímky (zkonstruovatelným pravítkem a kružítkem), ke *všem* přirozeným číslům (získatelným iterovaným přičítáním jedničky) apod. Jejich totality proto v tomto logicko-sémantickém smyslu existují, resp. neexistují stejně jako empirické předměty, totiž coby možné — a proto již abstraktní — předměty řeči.

Rozdíl možných přístupů k nekonečnu a potažmo matematice samé tak nemůže spočívat v pravidlech, jimiž je nekonečná totalita definována, ale v inferencích, které si nad nimi povolíme, např. v principu vyloučeného třetího. To naznačuje, že matematické a možná i jiné pojmy jsou inferenčně, nikoli ontologicky podmíněné, což je zdaleka nejradikálnější verze jazykového holismu, k níž se ještě vrátíme v úvahách nad Hilbertovým axiomatismem. S inferenční podmíněností přirozeně souvisí i podmíněnost pragmatická.

V tomto aspektu zůstává ovšem Brouwerův postoj a jeho přínos k dalšímu vývoji značně ambivalentní. Jeho metoda slabých protipříkladů např. poukazuje na některé neefektivní rysy klasické matematiky a logiky: jsou nespolehlivé nikoli ve smyslu sporu, ale praktické neověřitelnosti. Tento vhled však zůstává omezen výhradně na první fázi Brouwerova myšlení, před ustanovením metody tvůrčího subjektu, v níž byly protipříklady pomocí zákonných posloupností nahrazeny protipříklady operujícími s posloupnostmi volnými. Veden mentalistickým bludem se takto Brouwer dobrovolně rozhodl sledovat cestu, která musela být atraktivní pro člověka jeho talentu, nemohla ale právě pro obecnou neuchopitelnost vést k úspěchu. Brouwerova filosofie tak přestala být revolucí a stala se neúspěšným pučem.[40] Alternativou byla přitom od

[40] Užití revoluční terminologie v souvislosti s Brouwerovým intuicionismem mělo zajímavý vývoj. První podnět je bezesporu Weylův ("Brouwer —- das ist die Revolution"). Na základě tohoto výroku hovořil Ramsey [1925, s. 219] o Brouwerovi a Weylovi jako o "bolševické hrozbě" ("Bolshevik menace"), což mu zase na oplátku vyneslo od Wittgensteina [1994*b*, s. 473] označení "buržoazní filosof". O puči hovoří v souvislosti s Brouwerem a v reakci na Weylova slova Hilbert [1922, s. 160]: "Brouwer

počátku a zcela přirozeně matematika zákonných, jazykem uchopitelných posloupností a možností naší práce s nimi, již proto, že se v ní nabízela spolupráce s úspěšně se rozvíjejícími partiemi logiky, kterou však Brouwer *a priori*, a tedy dogmaticky odmítal. Této možnosti se později chopili Skolem a Gödel, a ve spolupráci s dalšími praktičtěji orientovanými logiky, jako byli Church a Turing, tak umožnili vznik teorie vyčíslitelnosti a moderní informatiky.

Není přitom divu, že Brouwerův argument, jenž vedl k odmítnutí cesty zákonné matematiky, a jímž tedy anabáze intuicionistické matematiky započala, byl převzat přímo od Cantora: čísla definovaná zákonem nepostihují kontinuum v jeho nespočetnosti. Matematický konstruktivismus jakožto ideový následník první fáze Brouwerova převratu odmítá tuto desinterpretaci diagonálního argumentu a snaží se revizi klasické analýzy postavit na méně fantastických podnětech, nežli je tvůrčí duch a volná posloupnost. Variabilita skromnosti těchto podnětů samozřejmě kolísá: velkorysejší linie vede od Weyla přes Hilberta k Lorenzenově operativní škole, nejskromnější větev staví na teorii rekurzivních funkcí. Skromnost je zde ovšem jen úhlem pohledu, jak ještě uvidíme. — Do později zmíněné, rekurzivní části spektra patří prominentně především Markovova ruská konstruktivní škola a Bishopova rekurzivní analýza. Všechna zmíněná hnutí se nicméně vyhraňují vůči 'intuitivnímu' dogmatismu Brouwerovy školy. Bishopova [1985, s. 9] charakteristika Brouwerova programu je zvláště přesná:

> Brouwera zjevně sužovala představa, že se bez jeho osobní intervence kontinuum stane diskrétním. Za tímto účelem zavedl metodu volných výběrových posloupností, jejímž důsledkem bylo, že kontinuum nemůže být diskrétní, protože není dobře definované. To udělalo matematiku tak bizarní, že se stala pro matematiky nestravitelnou, a Brouwerův program tím byl odsouzen ke zkáze. Je to škoda, protože Brouwer měl hluboký vhled do nedostatků matematiky a učinil heroický pokus o jejich nápravu.

Markovova kritika se zpravidla omezuje na věcné pozorování, že není možné "brát 'intuitivně jasné' za kritérium pravdy v matematice, neboť toto kritérium by znamenalo naprostý triumf subjektivismu a konec chápání vědy jakožto formy společenské činnosti".[41] Někteří konstruktivisté jako Lorenzen [1955, s. 3 nn] proto explicitně navazují na Hilbertův finitistický projekt.

není, jak se domnívá Weyl, revoluce, ale opakování pokusu o puč starými prostředky, pokusu, jenž kdysi v mnohem ráznějším provedení přece na celé čáře prohrál a je i nyní odsouzen k neúspěchu, tím spíš, že je moc státu díky Fregovi, Dedekindovi a Cantorovi dobře zajištěna a opevněna."

[41] Citát uveden in Troelstra & van Dalen [1988, s. 27].

Nosná idea rekurzivní alternativy přitom již byla naznačena. Základních výsledků analýzy, jako je nespočetnost kontinua či jeho souvislost, nemusí být nutně dosahováno fiktivními postuláty, jako je celek Zermelových axiomů či Brouwerův princip spojitosti. Vše je jen záležitostí adekvátní interpretace, přičemž stačí vyjít z Brouwerem tematizované a Řeky odhalené neefektivnosti teorie reálných čísel, skryté v nekonečné povaze zákonných posloupností, doplněné eventuálně, nikoli však nutně, o fakt jejich indefinitnosti. Negativní stránku věci, např. to, že v obecném případě nelze efektivně rozhodnout ani zda jsou dva zákony jmény téhož čísla, lze totiž proměnit ve stránku pozitivní, např. když dokážeme 'lokální' nespočetnost jistého oboru funkcí či neoddělitelnost jejich podmnožiny v rámci tohoto oboru samotného.

Na rozdíl od elitářství Brouwerova znamená ovšem tento interpretační krok skutečný převrat, neboť (1) eliminuje jak subjektivní přístup jeho intuicionismu, tak (2) metafyzické konsekvence množinového platonismu, a to (3) při zachování zdravého jádra dosažených výsledků. Navíc se mu (4) daří dosáhnout do té doby těžko představitelných aplikací, především v otázkách (ne)řešitelnosti některých matematických problémů (problém zastavení, axiomatizace aritmetiky, nerozhodnutelnost logiky a aritmetiky a dalších). Dialektickým produktem Brouwerova puče, jakési antitezi k logicistické a množinově-teoretické tezi, tak byla řada zcela nových disciplín právě na pomezí matematiky a logiky, především tedy samotná metamatematika coby dílo Brouwerova dřívějšího mentora a pozdějšího arcinepřítele Hilberta. Za tím vším se samozřejmě skrývala vážná, a mnohdy již zapomenutá rozhodnutí, např. definovat pojem efektivity, což znamená v důsledku pojem funkce, velmi specifickým způsobem. I zde ovšem hrozil a stále hrozí opačný extrém, totiž prohlášení naší volby za jedinou možnost, jak to v oboru rekurzivních funkcí dělá Churchova teze. Také k tomu se nějakým způsobem vyjádříme ve zbytku kapitoly.

7.7 Rekurzivní funkce

Dosud jsme používali pojmu 'efektivního' v dosti vágním smyslu 'zvládnutelného nějakým algoritmem', tj. konečným návodem, jak v konečně mnoha krocích dospět od konečného vstupu k nějakému konečnému výstupu. Tyto vstupy a výstupy nyní explicitně omezíme na přirozená čísla. Podmnožina čísel je přitom *rozhodnutelná* (*decidable*, *entscheidbar*), existuje-li algoritmus, jenž pro dané číslo v konečně mnoha krocích napíše odpověď ANO, jestliže číslo množině náleží, resp. NE, je-li tomu naopak. Množina je *polorozhodnutelná* (*semidecidable*, *semi-entscheidbar*), máme-li algoritmus alespoň pro první, pozitivní případ. V oddíle 5.10 jsme ukázali, že je polorozhodnutelnost množiny čísel ekvivalentní její *efektivní vyčíslitelnosti* (*enumerability*, *effektive Aufzählbarkeit*), tj. uspořádatelnosti v řadu. Ve vztahu k obecnému pojmu funkce můžeme ještě stanovit:

> Vlastnost EFEKTIVNÍ POČITATELNOSTI (*effective computability*, *effektive Berechenbarkeit*) náleží funkci f, jestliže existuje algoritmus, jenž pro vstup x vydá v konečně mnoha krocích výstup y právě tehdy, když $f(x) = y$.

Obecně přitom nebudeme mít problém zdůvodnit, že nějaká funkce či množina *je* efektivně zpracovatelná, ale ukázat, že takovou není, a to proto, že k tomu si již nevystačíme s vágní či, chceme-li, otevřenou definicí užitých pojmů. Stejně jako v případě antických problémů konstruovatelné veličiny se zde musíme explicitně omezit na schematicky popsaný obor toho, co budeme nazývat efektivním algoritmem, případně funkcí, jinými slovy: zvolit nějaké to ‘pravítko a kružítko’. V relativně krátkém časovém horizontu se přitom zjistilo, že zase tak mnoho možností není, resp. že všechny, které se zdály být nasnadě, jsou nakonec v nějakém smyslu ekvivalentní. Nevyhnutelnost této ekvivalence je právě předmětem Churchovy teze, která se proto stává tvrzením mimomatematickým.

Od počátku bylo přitom zřejmé, že navrhované algoritmické koncepty jsou efektivní v jistém velmi idealizovaném smyslu, v němž říkáme, že je něco proveditelné v principu, nikoli aktuálně. To celý projekt, speciálně tedy teorii rekurze, řadí dnes již spíše do teoretické nežli praktické (aplikované) matematiky. Abychom byli zcela konkrétní: Funkce f, přiřazující číslu $n > 1$ jeho nejmenší prvočíselný dělitel, je jistě principiálně počitatelná, neboť víme, že stačí jednoduše procházet čísla menší než n, ba dokonce menší než $\sqrt{n}$, jichž je tedy jen konečně mnoho, a dělit jimi číslo n, což rovněž zabere pouze konečně mnoho místa a času. Existuje k ní tedy algoritmus ve výše popsaném konečném smyslu slova. Vezmeme-li ale již číslo skládající se ze sta číslovek, které je snadno zapsatelné na čtvrtku papíru, potřebujeme v obecném případě provést takřka 10^{50} dělení, což při počítačích provádějících jako dnes či ještě nedávno 10^{10} dělení za sekundu vyžaduje 10^{32} let, tedy delší dobu, nežli existuje svět. Uvědomíme-li si přitom, že drastická není ani tak velikost (výpočtu) výstupu, jako její poměr k velikosti vstupu, můžeme jeho uvažováním dospět k tzv. výpočtové složitosti, představující zkoumání efektivity v jejím praktičtějším, antropomorfním smyslu. V tomto kontextu se někdy zavádí pojem proveditelné (*feasible*) funkce či procedury, který akceptuje nanejvýš polynomiální nárůst, nikoli nárůst exponenciální, jehož jsme byli svědky. Teorie efektivních funkcí v našem — rekurzivním — smyslu tyto rozdíly ignoruje. Obecně platí, že “efektivním” v této knize rozumíme vždy něco jako “mechanicky”, případně “algoritmicky počitatelné”, nikoli “počitatelné v reálném čase”.

Název rekurzivní funkce přitom naznačuje, že se bude jednat o funkce definované rekurzí, tedy způsobem, s nímž jsem se setkali v oddíle 5.7 v souvislosti s Dedekindovou aritmetikou. Dedekind je také zodpovědný za obecnou formulaci rekurzivní procedury:

> Jsou-li g a h funkce o n, resp. $n+2$ proměnných, je funkce
>
> (i) $f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$,
>
> (ii) $f(\vec{x}, s(y)) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$
>
> o $n+1$ proměnných DEFINOVÁNA (PRIMITIVNÍ) REKURZÍ.

Pro specifické operace ji již dříve artikuloval Grassmann [1861]. V souvislosti s interpretací role rekurzivního teorému v logicismu jsme přitom argumentovali, že definice rekurzí je čistě konstruktivní prostředek zavádění funkcí, a nepotřebuje být tedy obhajována, nemáme-li již nějaký obecnější pojem, jak tomu bylo právě u Dedekinda a Frega.

Proklamovaná efektivita uvažované konstrukce, díky níž víme, jak z daných vstupů získat rekurzivním voláním požadovaný výstup, se ale omezuje na samotný proces získání výsledku. Při volbě neefektivně daných vstupů, tj. konkrétně: při neefektivních funkcích g, h, výpočetní algoritmus, skrytý za uvedeným popisem, kolabuje, resp. přestává být efektivní. Co se nyní nabízí, je popsat celý obor efektivních funkcí také rekurzivně, při takové volbě induktivní báze, v níž se vyskytují pouze efektivní funkce, a proces definování dalších funkcí tak nemůže vést k funkcím neefektivním, za předpokladu, že užívá striktně efektivních definičních principů, jako je definice primitivní rekurzí. Takto dojdeme nejprve k pojmu primitivně rekurzivní funkce, jak jej v anticipaci Skolemově [1923*a*] zavedl Kurt Gödel [1931]. Ten jim zprvu říkal rekurzivní, což se později vyhradilo pro obecnější pojem, jejž zavedeme záhy. Mezi ZÁKLADNÍ FUNKCE, tvořící bázi oné indukce, přitom budeme počítat funkci následnickou, konstantní nulu a j-tou projekci, neboli

(a) $s(x) = x + 1$,

(b) $z(x) = 0$,

(c) $p^n_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ pro $1 \le j \le n$.

Nyní je třeba specifikovat ony efektivní způsoby — induktivní krok definice —, jak ze zavedených funkcí odvozovat další. Jedním z nich je již zmíněná rekurze, druhým pak definice substitucí:

> Je-li g n-argumentová funkce a $h_1, \ldots, h_n$ funkce o m proměnných, pak je funkce $f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_n(\vec{x}))$ o m proměnných DEFINOVÁNA SUBSTITUCÍ.

Primitivně rekurzivní funkce je pak libovolná n-ární funkce na N_0, která je definována ze základních funkcí konečným počtem aplikací. Jejich třídu značme prf. Je zřejmé, že všechny tyto funkce jsou totální a efektivně počitatelné ve výše uvedeném smyslu. Je věcí běžné rutiny ukázat, že většina známých aritmetických funkcí, např. sčítání, násobení, mocnění apod., leží v prf. Dále je zvykem předvést, že jsou jisté běžné definiční způsoby přípustné, tj. že je na ně prf uzavřena. Nejprve ale zaveďme další definici:

> Množina (relace) A se nazývá primitivně rekurzivní, jestliže má primitivně rekurzivní charakteristickou funkci; podobně hovoříme o predikátu (podmínce) P takovém, že $A = \{\vec{x} \mid P(\vec{x})\}$.

Třídu primitivně rekurzivních množin (relací, podmínek) značme PR. Tak např. relace $=$, $<$ a $\leq$ jsou PR. Platí také uzavřenost PR-podmínek na konjunkci, disjunkci, negaci a omezenou kvantifikaci $(\exists y < z)P(\vec{x}, y)$ a $(\forall y < z)P(\vec{x}, y)$. Díky tomu je v PR např. vlastnost prvočíselnosti. Funkce definovaná po částech jako

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g(\vec{x}) & \text{když } P(\vec{x}), \\ h(\vec{x}) & \text{jinak} \end{cases}$$

je primitivně rekurzivní, jsou-li primitivně rekurzivní i funkce g, h a podmínka P. Z toho úhrnem dostáváme i možnost definovat prf-funkci tzv. omezenou minimalizací, tj. předpisem

$$f(\vec{x}, z) = \mu y < z(R(\vec{x}, y)),$$

kde zápis $\mu y P(y)$ obecně čteme jako "nejmenší y takové, že $P(y)$", přičemž v omezení na $y < z$ zcela konvenčně předpokládáme, že v případě neexistujícího $y < z$ s vlastností $P(y)$ platí $f(\vec{x}, z) = z$. Tím pokryjeme právě ten nepříjemný případ, který by v případě neomezené minimalizace mohl nastat, totiž že by definovaná funkce v daném argumentu zůstala neurčena.

Omezenou minimalizací lze např. definovat prf-funkci $p(x)$, která vyčísluje všechna prvočísla, a to proto, že pro každé x platí $p(x+1) \leq p(x)!+1$, tj. existuje horní mez pro délku hledání dalšího prvočísla, které je, jak víme, dáno PR-podmínkou, a rovněž faktoriál je prf-funkcí. Vedle totality je to přitom právě předem daný odhad délky výpočtu, co odlišuje primitivně rekurzivní funkce od šíře pojaté skupiny efektivních funkcí. Důvod je snadno vizualizovatelný: Primitivní rekurze obsahuje explicitní parametr, kolikrát se musí opakovat rekurzivní volání, aby bylo dosaženo výpočtu. V programovacích jazycích tomu odpovídá obvyklý `for`-cyklus neboli příkaz

`for` x `do` S,

kde x označuje počet opakování, pro něž se má provádět procedura S. V kontrastu k němu existuje neomezený `while`-, resp. `until`-cyklus

`while`/`until` C `do` S,

podle něhož má být procedura S prováděna opakovaně do té doby, než přestane, případně začne platit podmínka C. To vede již k dříve zmíněné (neomezené) minimalizaci, a tedy i k rozšíření pojmu funkce. Argument, že je toto rozšíření nutné, přitom kopíruje Cantorův diagonální důkaz nespočetnosti kontinua, a má proto pro naši věc mimořádný význam. Ve stručnosti jej tedy předveďme.

Podstatné je, že pojem primitivně rekurzivní funkce byl (přinejmenším do tohoto okamžiku) dán čistě syntakticky. Tím pádem nemůžeme narazit na ten typ problémů, které jsme diskutovali v oddílu 6.2 v souvislosti s Richardovým paradoxem, neboť u každého výrazu daného jazyka nezávisle na významu výrazů ostatních poznáme, zda je jménem primitivně rekurzivní funkce či nikoli, neboli: systém prf je rozhodnutelný. O tomto způsobu popisu jsme také hovořili jako o schematickém, přičemž Cantorův diagonální důkaz lze číst tak, že systém všech jmen reálných čísel schematický není, protože vykazuje situačně-závislé rysy (je podstatně závislý na tom, co bylo definováno dříve). U prvků prf je tomu jinak. Zde můžeme z předem dané řady všech výrazů aritmetického jazyka, rozšířeného o prostředky definice prf-funkcí, postupným procházením získat vyčíslení

$$f_1, f_2, \ldots$$

všech primitivně rekurzivních funkcí a pouze jich. Uvažujeme-li tedy např. jen všechny funkce jednoargumentové, máme nějakou dvojargumentovou funkci

$$F(x, y) = f_x(y),$$

která je zjevně efektivně počitatelná, tj. víme, jak pro dané vstupy dostat v konečně mnoha krocích příslušný výstup. Totéž ovšem musí platit i pro diagonálu $d(x) = F(x, x)$ a její deformaci $d'(x) = d(x) + 1$, která ale nemůže být prf, neboť jinak by měla nějaký index e, tj. platilo by $f_e(x) = d'(x)$ a z rovnice $f_e(e) = d'(e) = f_e(e) + 1$ bychom dostali spor. Z definice prf nemůže být tím pádem primitivně rekurzivní ani diagonála $d(x)$, ani funkce $F(x, y)$, představující tzv. univerzální (jednoargumentovou) prf-funkci, neboli funkci, z níž vznikne každý (jednoargumentový) prvek prf dosazením nějakého čísla (indexu) za x.

Jestliže tedy definicí prf sledujeme formální zachycení neformálního pojmu efektivní počitatelnosti a uznáváme-li, že funkce $F(x, y)$ efektivně počitatelná je (ani k jednomu nás nikdo nenutí!), pak musíme uznat i existenci počitatelné funkce, která není prf, a naše preteoretické ztotožnění efektivní funkce s prf je prokázáno jako příliš úzké. Samozřejmě můžeme také usoudit, že třída prf je v nějakém (primitivně rekurzivním) smyslu nespočetná, z hlediska sledovaných úmyslů to ale nemá žádnou hodnotu, tedy zatím.

Co hodnotu má, je analýza příčiny selhání spatřená v omezenosti `for`-cyklu. Při počítání funkce $F(x, y)$ se totiž nezdá být dopředu zajištěna ani mez pro hledání jména prf-funkce odpovídajícího vstupu x, ani to, kolik bude tato funkce potřebovat kroků při výpočtu hodnoty pro vstup y. Nabízí se tedy vzít operaci minimalizace

$$f(\vec{x}) = \mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$$

a přidat ji k rekurzivní definici efektivní funkce. Aby se jednalo stále o funkce totální, můžeme chtít přidat ještě podmínku

$$(\forall \vec{x})(\exists y)(g(\vec{x}, y) = 0),$$

tím se ale náš pojem jména stane okamžitě 'sémantickým', tj. potenciálně neefektivním, neboť se odvolává na existenci *hodnot* pro každý argument, což nemusí být podmínka syntakticky ověřitelná, zvláště když vezmeme v úvahu nekonečnost oboru příslušné proměnné. Alternativním postupem je nechat definici tak, jak je, tj. připustit i funkce parciální, částečné, za současného vyjasnění několika detailů.

Tak především, funkce definovaná minimalizací $\mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$ se může stát nedefinovanou v nějakém vektoru argumentů $\vec{x}$ z dvojího důvodu. V prvním, přirozeném případě jednoduše neexistuje y takové, aby platilo $g(\vec{x}, y) = 0$. V druhém případě takové y sice existuje, zároveň však existuje nějaké $z < y$, pro něž není $g(\vec{x}, z)$ vůbec definováno, a při postupném výpočtu se algoritmus skrývající se za příslušnou efektivní funkcí zacyklí. Označíme-li okolnost, že je funkce f v argumentu $\vec{x}$ definována, jako $f\downarrow(\vec{x})$, a symbolem $f(\vec{x}) \cong g(\vec{x})$ rovnost částečných funkcí (to, že jsou příslušné hodnoty buď obě nedefinovány, nebo jsou obě definovány a rovnají se), dostaneme následující reformulaci naší operace:

> Je-li g funkce o $n+1$ argumentech, je n-argumentová funkce f, pro niž platí
>
> $$f(\vec{x}) = z \rightleftharpoons g(\vec{x}, z) = 0 \wedge (\forall y < z)(g\downarrow(\vec{x}, y) \wedge g(\vec{x}, y) \neq 0),$$
>
> DEFINOVÁNA MINIMALIZACÍ jako
>
> $$f(\vec{x}) \cong \mu y(g(\vec{x}, y) = 0).$$

Funkce, které vzniknou ze základních funkcí primitivní rekurzí, substitucí a minimalizací, nazýváme ČÁSTEČNĚ REKURZIVNÍ. Jejich systém značíme crf. Je zřejmé, že ne všechny funkce této třídy jsou totální a že

tak odpovídají neformálnímu konceptu částečné počitatelnosti, tj. představují zobecněný algoritmus, jenž buďto dospěje k výsledku v konečně mnoha krocích, nebo se zacyklí. Výhodou je, že mají opět syntakticky popsaný obor reprezentací, a lze je tedy efektivně vyčíslit. Z tohoto vyčíslení pak můžeme *sémantickou* podmínkou totální definovanosti vydělit jejich vlastní podtřídu tzv. FUNKCÍ (OBECNĚ) REKURZIVNÍCH, symbolicky orf, odpovídajících algoritmu terminujícímu pro každý vstup.

Ověření toho, že daný algoritmus terminuje pro daný vstup, je známo jako tzv. problém zastavení a bylo dokázáno, že je obecně algoritmicky neřešitelný. Množina všech netotálních funkcí tak není rozhodnutelná a, jak vyplyne z vět dalších, ani polorozhodnutelná, což se zdá naznačovat, že prosté vyškrtání netotálních funkcí z daného vyčíslení funkcí částečně rekurzivních nebude tentokráte schůdnou cestou, jak dospět k vyčíslení funkcí rekurzivních. V důsledku toho nepůjde použít diagonální argument ke konstrukci efektivní totální funkce, která by nebyla rekurzivní, odkud již můžeme argumentovat pro (lokální) nespočetnost orf. K tomu, abychom ale takto silné negativní výroky mohli tvrdit a dokazovat, je třeba dokončit proces vymezování, schematizace užitých pojmů. Teprve pak půjde z toho, že něco nejde učinit nějakým způsobem, usoudit, že to nejde způsobem žádným.

Tak zaprvé: s pojmem rekurzivní funkce po ruce můžeme dospět k formálnímu pendantu neformálního pojmu rozhodnutelnosti, když řekneme:

> Množina (relace) A se nazývá (OBECNĚ) REKURZIVNÍ, jestliže má (obecně) rekurzivní charakteristickou funkci; přeneseně tak rovněž hovoříme o vydělujícím predikátu.

Systém rekurzivních relací a podmínek značíme OR. Je zřejmé, že rekurzivní relace je rozhodnutelná v dříve užívaném širším smyslu. O skládání rekurzivních funkcí a relací platí vše, co jsme dříve řekli o funkcích a relacích primitivně rekurzivních, jak se o tom lze celkem rychle přesvědčit na poloformální úrovni. Speciálně platí, že pro R rekurzivní podmínku je funkce

$$f(x) \cong \mu y R(\vec{x}, y)$$

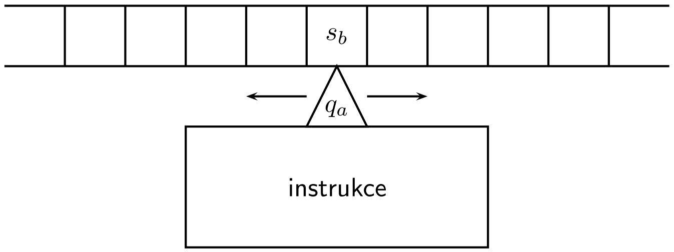
crf a v případě, že $(\forall \vec{x})(\exists y) R(\vec{x}, y)$, dokonce orf. Co nám zbývá formalizovat nyní, je především pojem efektivní vyčíslitelnosti. Zde je ovšem lépe namísto malých kroků udělat jeden veliký, spočívající v převedení částečně rekurzivních funkcí na kanonický tvar. Právě to nám umožní dokazovat silná tvrzení o jejich celku, včetně tvrzení negativních, aplikujících na tyto funkce tytéž formalizované pojmy, k jejichž definici byly použity. Takto budeme moci dokázat, že systém všech rekurzivních funkcí není rekurzivní, bez toho, abychom využívali preteoretický pojem rozhodnutelnosti, a točili se tak v hermeneutickém kruhu. V pojmu rekurzivní spočetnosti pak nalezneme formální protějšek efektivní vyčíslitelnosti na straně jedné a preformální, preteoretický protějšek spočetnosti na straně druhé.

7.8 Rekurzivní spočetnost

(Částečně) rekurzivní funkce nejsou jen prosté korespondence mezi čísly, ale strukturované návody, jak od daného argumentu efektivně přejít k výsledku. Z heuristických důvodů jsou proto často uváděny některé jejich algoritmicky transparentnější ekvivalenty, prominentně tzv. Turingův stroj coby princip současných počítačů. Jedná se o teoretický model jednoduchého mechanismu, jenž pomocí čtecí a zapisovací hlavy prohlíží a upravuje potenciálně nekonečnou (v praxi: dostatečně dlouhou) pásku, rozdělenou na diskrétní pole. Hlava se nachází vždy v jednom z konečně mnoha stavů, podle něhož a obsahu čteného pole pak provádí jednu z konečně mnoha instrukcí, na něž je napojena. Ve vztahu k této množině definujeme:

> Turingův stroj je systém sestávající z (1) konečné abecedy $A = \{s_1, \ldots, s_n\}$, (2) konečné množiny vnitřních stavů $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ s vyznačenými stavy (3) q_1 coby počátečním a q_m coby finálním a z (4) konečné sady I instrukcí jednoho z následujících tvarů (i) $q_a s_b s_c q_d$, (ii) $q_a s_b L q_d$ a (iii) $q_a s_b P q_d$. Na prvky I je kladen požadavek konzistence, podle něhož se pro žádné $q_a s_b$ v I neobjevují dvě různé instrukce.

V mechanickém příměru, zachyceném na obrázku 7.4, odpovídá části $q_a s_b$ instrukce momentální stav hlavy a obsah čteného pole, zatímco druhá část říká, (i) že bude s_b přepsáno na s_c, (ii) že se hlava pohne o políčko vlevo, resp. (iii) vpravo. Ve všech případech se pak momentální stav



Obrázek 7.4: Turingův stroj

změní na q_d. Výpočet začíná vždy ve stavu q_1, jeho výstupem je obsah pásky poté, co se stroj dostal do stavu q_m.[42] Stejně jako byla dokázána

[42] Další detaily in Odifreddi [1989], případně Lewis & Papadimitriou [1998].

ekvivalence programovacích jazyků obsahujících varianty příkazů `for` a `while` s teorií částečně rekurzivních funkcí, byla dokázána i její ekvivalence s Turingovými stroji, neboli teze, že Turingův stroj počítá funkci f tehdy a jen tehdy, jestliže je f crf. Podstatné je v každém případě to, že Turingův stroj i částečně rekurzivní funkce jsou konečné, schematicky dané objekty, které lze právě proto snadno kódovat přirozenými čísly, a to efektivně, pomocí primitivně rekurzivních funkcí.

Základem toho je možnost kódovat posloupnosti čísel čísly, opírající se standardně o jednoznačnost prvočíselného rozkladu. Takto lze zkonstruovat injektivní funkci z $\mathsf{N}_0{}^{<\mathsf{N}}$ do N_0, např. předpisem

$$c(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle) = p(0)^{x_0+1} p(1)^{x_1+1} \cdots p(n)^{x_n+1}.$$

Exponent je zde zvyšován o 1 s ohledem na případy, kdy je v kódované posloupnosti 0. Funkce c není zjevně surjektivní, což ale nepředstavuje vážnější problém, zvláště když je vlastnost "být kódem posloupnosti čísel" PR. Kód posloupnosti $x_1, \ldots, x_n$ budeme dále značit jako $\|x_1, \ldots, x_n\|$. Není obtížné nahlédnout, že zavedené kódy lze snadno a jednoznačně dekódovat, tj. definovat prf-funkce takové, že

$$(x)_i = x_i, \text{ jestliže } x = \|x_1, \ldots, x_n\| \text{ a } 1 \leq i \leq n.$$

Další detaily vynecháme a přejdeme ke kódování částečně rekurzivních funkcí, resp. jejich jmen. Vzhledem k jejich induktivní výstavbě můžeme rovněž postupovat induktivně, tj. přidělit nějaké kódy základním funkcím, a na tomto základě pak i funkcím složeným. Tak např. vedle kódů $\|0\|$ a $\|1\|$ pro s, resp. z, bude projekce p^n_j kódována jako trojice $\|2, n, j\|$ zachycující typ funkce, počet argumentů a typ projekce. Kód $\|4, a, b\|$ může značit funkci vzniklou primitivní rekurzí z funkcí o kódech a a b apod.[43] Na základě řečeného je zřejmé, jak efektivně ověřit, zda je dané číslo kódem částečně rekurzivní funkce. Příslušný predikát "být kódem crf" je dokonce PR. Dalším krokem je kódování výpočtů.

Výpočtem rozumíme průběh algoritmu skrývajícího se za crf-funkcí v aplikaci na konkrétní vstup, neformálně řečeno: to, co si zaznamenáváme na papír, když příslušnou funkci pro dané argumenty počítáme, alternativně tedy záznam činnosti Turingova stroje. Detaily kódování tohoto procesu jsou četné, věcně ale nepředstavují vážnější problém, takže nakonec máme tzv. Turingův predikát

$$T_n(e, x_1, \ldots, x_n, z),$$

který říká, že z je kódem výpočtu hodnoty n-ární funkce kódu e v aplikaci na argumenty $x_1, \ldots, x_n$. Tento predikát je PR, stejně jako funkce $U(z)$, vybírající z kódu výpočtu jeho výstup. Nyní již můžeme formulovat tzv.

[43] Další detaily viz třeba Odifreddi [1989, s. 90 nn].

VĚTU O NORMÁLNÍ FORMĚ, dokázanou Kleenem [1936a] pro speciální případ rekurzivních funkcí a později [1943] obecně, podle níž ke každé částečně rekurzivní funkci f o n proměnných existuje číslo e takové, že

$$f(\vec{x}) \cong U(\mu z T_n(e, \vec{x}, z)),$$

tj. každý prvek crf lze prezentovat ve tvaru, v němž byla jedinkrát použita minimalizace, a to až v předposledním kroku. Pro každé n zde tak máme UNIVERZÁLNÍ (n-argumentovou) crf-FUNKCI

$$\Psi_n(e, \vec{x}) \cong U(\mu z T_n(e, \vec{x}, z)),$$

která je z definice rovněž částečně rekurzivní. Univerzální primitivně rekurzivní funkce je definována jako

$$\Pi_n(e, \vec{x}) = \begin{cases} U(\mu z T_n(e, \vec{x}, z)) & \text{když } e \text{ je kód } \mathsf{prf}, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

přičemž z toho, že sama nemůže být prf (jak bylo ukázáno v předchozím oddíle) a že musí být crf, a to dokonce totální, usoudíme, že je orf. Zde je ovšem důležité uvědomit si podstatnou změnu, ke které došlo po rozšíření pojmu primitivně rekurzivní funkce na pojem funkce částečně rekurzivní. Jelikož funkce jako význam jména je definována skrze ekvivalenční třídu přípustných reprezentací, v tomto případě shodou průběhů hodnot, může prvku z prf odpovídat jméno, v němž byla použita neomezená minimalizace. Tím pádem je celek jmen funkcí z prf, stejně jako těch z orf, definován sémanticky (shodou průběhů hodnot), a tedy perspektivně nerozhodnutelný. Že je skutečně nerozhodnutelný, je důsledkem tzv. Riceovy věty, s níž naši exkurzi do teorie rekurzivních funkcí ukončíme, nicméně argument pro efektivní vyčíslitelnost všech primitivně rekurzivních funkcí platí v tom smyslu, že jsme s to zkonstruovat řadu jmen, která jsou jmény všech prvků z prf a pouze jich. To je dáno tím, že existuje rozhodnutelná podtřída jmen částečně rekurzivních funkcí, která pokrývá celou prf, totiž všech těch funkcí popsatelných bez užití minimalizace. V podmínce kladené na výše popsanou funkci $\Pi_n(e, \vec{x})$ by tedy správně mělo být uvedeno "e je primitivně rekurzivní kód", nikoli "e je kód prf", neboť to první, nikoli druhé, je rekurzivní podmínkou.

Predikát "e je kód prf" byl přitom dříve rekurzivní podmínkou hlavně proto, že jsme ještě jiné než primitivně rekurzivní funkce nezavedli, tj. obor indexů prf fungoval stejně jako standardní numerály 1, 2, 3, ... v roli kanonického designátoru, systému reprezentací, jež dláždí a zcela pokrývají prostor konstituovaného oboru. Již v rámci úvodních úvah o tom, zda je některá ze známých aritmetických funkcí, jako je sčítání či mocnění, prf, jsme se ovšem ocitli v situaci, kdy byla primitivní rekurze dílčím definitorickým prostředkem. Pak se, stejně jako nyní, stal pojem prf spoluzávislý na sémantické podmínce totožnosti průběhů hodnot, a tedy potenciálně neefektivní. V rámci teorie rekurze, v němž se nyní pohybujeme, je ale podstatné, že jsou indexy prf, tj. aparát primitivní rekurze, stále součástí množiny kanonických designátorů oboru uvažovaných funkcí, nikoli jejich určitou deskripcí, jak je tomu u Frega a Dedekinda.

Vraťme se ale k normální formě částečně rekurzivních funkcí. Na bázi Kleenovy věty a rovnosti

$$\varphi^n_e(\vec{x}) \cong \Psi_n(e, \vec{x})$$

snadno provedeme enumeraci $\varphi^n_0(\vec{x})$, $\varphi^n_1(\vec{x})$, ... všech crf-funkcí daného počtu proměnných. Jelikož ne všechna čísla kódují funkce, můžeme je buď vyškrtat, nebo říci, že kódují funkci s prázdným definičním oborem. S enumerací částečně rekurzivních funkcí dostáváme zároveň enumeraci jejich definičních oborů:

$$W^n_e = \{\langle\vec{x}\rangle \mid (\exists z) T_n(e, \vec{x}, z)\}.$$

Právě a pouze tyto množiny nazýváme rekurzivně spočetné, neboli:

> Množina $A \subseteq (\mathsf{N}_0)^n$ je REKURZIVNĚ SPOČETNÁ (*recursively enumerable*, *rekursiv aufzählbar*) tehdy a jen tehdy, když $A = W^n_e$ pro nějaké e.

Příslušné množiny a predikáty budeme značit RS. Předtuchu, že technický pojem rekurzivní spočetnosti odpovídá pojmu polorozhodnutelné množiny, potvrzuje tzv. VĚTA O PROJEKCI, podle níž rekurzivně spočetné množiny jsou právě ty, pro něž platí

$$A = \{\langle\vec{x}\rangle \mid (\exists y) R(\vec{x}, y)\},$$

kde R je OR. Jedna strana důkazu přitom plyne přímo z definice, druhou dostaneme uvažováním funkce $f(\vec{x}) \cong \mu y R(\vec{x}, y)$, která je zjevně crf a má definiční obor shodný s A. Rekurzivní predikát R představuje bázi příslušného algoritmu polorozhodnutí, neboť v případě, že $\vec{x}$ množině A náleží, existuje číslo y, které toto náležení dosvědčí a na něž lze, s ohledem na rekurzivitu R, přijít v konečně mnoha krocích, testujících po řadě čísla 0, 1, 2 atd. V opačném případě takovéto číslo neexistuje a algoritmus se zacyklí. Významná je rovněž uzavřenost RS-podmínek na existenční kvantifikaci, která plyne z ekvivalence vztahů

$$(\exists x)(\exists y) R(x, y, z) \qquad (\exists w)(\exists x \leq w)(\exists y \leq w) R(x, y, z).$$

Souvislost rekurzivní spočetnosti s efektivní vyčíslitelností ozřejmují následující ekvivalentní podmínky:

(a) A je RS,

(b) $A = rng(\varphi_e^n)$ pro nějaké e,

(c) $A = \emptyset$ nebo $A = rng(\varphi_e^n)$ pro nějaké e rekurzivní funkce.

Důkaz ekvivalence nebudeme předvádět, povšimneme si ale, že poslední podmínka v podstatě odpovídá tomu, co potřebujeme, totiž efektivnímu vyčíslení rekurzivně spočetné množiny, až na to, že uvažovaná rekurzivní funkce nemusí být prostá. Toho lze snadno dosáhnout v případě nekonečných RS postupnou kontrolou dosud vyčíslených prvků. Pro rekurzivní množiny platí elegantnější ekvivalence

(a) A je OR,

(b) $A = \emptyset$ nebo $A = rng(\varphi_e^n)$ pro nějaké e neklesající rekurzivní funkce.

Pro nekonečné OR lze dosáhnout rekurzivního vyčíslení rostoucího. Nyní již můžeme přistoupit k prvním negativním výsledkům, konkrétně k tvrzení, že existuje RS-množina, která není OR, ba co víc, že existuje množina, která není ani RS. Předtím dokažme jeden pozitivní výsledek, obsažený v tzv. Postově větě:

> A je OR tehdy a jen tehdy, když A i její doplněk $-A$ jsou RS.

Důkaz: Směr vpravo je triviální, dokážeme proto jen opačnou implikaci. Pro A i $-A$ existují algoritmy polorozhodnutí, nemáme tedy zajištěno, který z nich pro daný vstup skončí, víme však, že jeden z nich to bude. Oficiálně vezmeme rekurzivní predikáty R, S, existující z věty o projekci, a definujeme funkci $f(\vec{x}) = \mu y(R(\vec{x}, y) \vee S(\vec{x}, y))$, která je zjevně rekurzivní. Funkce

$$c_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{když } R(\vec{x}, f(\vec{x})), \\ 0 & \text{když } S(\vec{x}, f(\vec{x})) \end{cases}$$

je charakteristickou funkcí A, která je totální, a tedy orf. □

Nyní již ke slíbeným negativním výsledkům, resp. k jejich bázi. V reminiscenci na Russellův paradox uvažme množinu indexů (jednoargumentových) funkcí, případně Turingových strojů, které se na svém indexu zastaví, tj. jsou pro něj definovány, a označme ji jako

$$K = \{x \mid x \in W_x\} = \{x \mid (\exists z)T(x, x, z)\}.$$

Z poslední rovnosti plyne, že se jedná o RS-množinu. Kdyby byla K rekurzivní, musel by být rekurzivní i její doplněk $-K$. Pak by dále pro nějaké e platilo

$$W_e = -K = \{x \mid x \notin W_x\}.$$

Podobně jako v případě Russellovy množiny se nyní ptáme, zda platí $e \in W_e$ nebo $e \notin W_e$, a dostáváme vždy inverzní odpovědi, tedy spor. Množina K takto není OR.

Všimněme si, že v argumentu bylo sporu dosaženo na základě předpokladu, že je $-K$ rovno nějakému W_e. To v důsledku znamená, že $-K$ nemůže být ani RS. Totéž při znalosti nerekurzivity K dostáváme přímo z Postovy věty. Na případ dokázané nerekurzivity K můžeme nyní převést také již zmíněný problém zastavení (*halting problem*), formulovatelný jako otázku po rekurzivitě množiny

$$K_0 = \{\langle x, y\rangle \mid y \in W_x\} = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)T(x, y, z)\}.$$

Problém $x \in W_x$ je ovšem speciálním případem problému $y \in W_x$, rozhodnutelnost K_0 by tak znamenala i rozhodnutelnost K, což, jak víme, není možné. Tím pádem je problém zastavení negativně vyřešen.

Dále můžeme dokázat konstruktivní variantu Cantorovy věty, podle níž neexistuje rekurzivní vyčíslení systému všech rekurzivních funkcí v tom smyslu, že by se mezi seřazenými indexy objevily všechny funkce z orf alespoň jednou a žádné jiné. Podle výše uvedených ekvivalencí to znamená, že platí:

> orf je nejen nerozhodnutelná, ale i rekurzivně nespočetná.

Důkaz: Předpokládejme, že máme nějakou rekurzivní funkci f, v jejímž oboru hodnot je pro každou (jednoargumentovou) orf alespoň nějaký její index a žádný jiný index nežli funkce z orf se tam nevyskytuje. Předpis $g(x) = U(\mu z T(f(x), x, z))$ určuje částečně rekurzivní funkci, která je totální podle předpokladu a platí $g(x) = \varphi_{f(x)}(x)$. Tím pádem je totální i částečně rekurzivní funkce $g'(x) = g(x) + 1$, která se ovšem liší od libovolné funkce ve vyčíslení daném f, což znamená, že uvažovaná f nemůže existovat. □

Z toho okamžitě plyne, že ani množina $\{x \mid \varphi_x \text{ je totální}\}$ nemůže být RS. Tento negativní výsledek lze zobecnit ve formě tzv. Riceovy věty, kterou lze považovat za jistou variantu Brouwerovy věty o souvislosti (nerozdělitelnosti) kontinua:

> Nechť je A množina částečně rekurzivních funkcí. Není-li A triviální, tj. $A \neq \emptyset$ a $A \neq$ crf, pak množina $B = \{x \mid \varphi_x \in A\}$ není rekurzivní.

Důkaz: Neformální idea důkazu je následující. Máme funkci $\varphi_a \in A$ a předpokládáme, že totálně nedefinovaná funkce $\emptyset$ je prvkem $-A$. Okolnost, že je to bez újmy na obecnosti, vysvětlíme záhy. Víme, že ve jménu částečně rekurzivní funkce není skryt jenom její průběh hodnot, ale také algoritmus výpočtu. Vezměme proto funkci f takovou, která pro vstup u

nejprve počítá hodnotu funkce $\varphi_x(x)$ pro nějaké předem dané x a v případě úspěchu výsledek zahodí a vypočte hodnotu $\varphi_a(u)$, pokud tato existuje. Je zřejmé, že se jedná o funkci částečně rekurzivní, která se v případě $x \in K$ extenzionálně shoduje s funkcí φ_a, jinak s funkcí $\emptyset$, a je tedy *de facto* definována jako

$$f(u) \cong \begin{cases} \varphi_a(u) & \text{když } x \in K, \\ \emptyset & \text{jinak.} \end{cases}$$

Není také těžké uvěřit, že index, zachycující přímo její konstrukci, musí být rekurzivní funkcí zvoleného x. Platí tedy $f = \varphi_{h(x)}$ pro nějakou rekurzivní funkci h. Nyní ale zcela triviálně platí ekvivalence

$$x \in K \leftrightarrow \varphi_{h(x)} = \varphi_a \leftrightarrow h(x) \in B,$$

a z rekurzivity h proto plyne, že kdyby bylo B rekurzivní, dokázali bychom pro dané x rozhodnout, zda $x \in K$, což, jak víme, nelze. Tím pádem jsme hotovi. Předpoklad, že $\emptyset \in -A$, nevadí z toho důvodu, že v opačném případě můžeme uvažovat nějakou funkci $\varphi_b \in -A$ a jinak postupovat zcela stejně, resp. dokázat nerekurzivitu $-B$, z níž již nerekurzivita B plyne. V rigorózní verzi důkazu je existence pomocných funkcí zajištěna dalšími teorémy, které se nám nevyplatí formulovat. □

Podle Riceovy věty je množina indexů každé netriviální třídy funkcí (rekurzivně) neoddělitelná (v Brouwerově smyslu). Z Postovy věty dokonce plyne, že není ani rekurzivně spočetná, přinejmenším jestliže je rekurzivně spočetný její doplněk, tj. jeden z případů A, $-A$ pro A netriviální je jistě rekurzivně nespočetný. Případem rekurzivně nespočetné množiny indexů je již zmíněná $\{x \mid \varphi_x \text{ je totální}\}$. Totéž platí o množině všech indexů $\{x \mid \varphi_x = f\}$ dané funkce f a jejím doplňku. Rovněž indexy všech funkcí z prf nenáleží RS.

7.9 Churchova teze

S Riceovou větou náš krátký výlet do teorie rekurzivních funkcí naplnil svůj účel, a my se tedy můžeme věnovat vyvozování filosofických závěrů. Možnost schematického uchopení pojmů efektivity přitom není jediným a z momentálního hlediska ani nejvýznamnějším výsledkem celého výkladu, přestože ho později ještě s úspěchem využijeme v souvislosti s Gödelovými výsledky o neúplnosti. Co nás především zajímá, je demonstrovaná možnost simulovat Cantorovy, a potažmo i Brouwerovy výsledky způsobem, jenž je prost ontologických konotací, a nevede tedy k pluralitě protichůdných a z analytického hlediska neakceptovatelných interpretací. To se týká v první řadě otázky nespočetnosti systému všech funkcí, v jeho

omezení na funkce rekurzivní a v upřesnění pojmu spočetnosti na rekurzivní spočetnost. Tyto specifikace přitom nejsou nijak svévolné, tj. není zde rozpor mezi Cantorovým liberálním pojmem funkce a následnou restrikcí na jeho *species*, neboť Cantorův diagonální argument má v první řadě preteoretický charakter, tj. je ho třeba číst jako zdůvodnění toho, proč je třeba pojem funkce rozšířit, nikoli jako tvrzení, že je funkcí na přirozených číslech v nějakém smyslu více nežli přirozených čísel. Vzpomeňme znovu, že vztah mezi relací "větší než", aplikovanou na nekonečné totality, a možností jedno-jednoznačného přiřazení prvků těchto totalit, byl zprvu více než problematickou konvencí, kterou jsme nyní velmi elegantním a neproblematickým způsobem přistřihli, aniž bychom ztratili výhody, které plynuly z jejího zavedení.

Jako první ilustraci toho, o jaký typ proměny se nám jedná, můžeme zmínit transformaci Cantorova nekonstruktivního argumentu pro existenci transcendentních čísel v konstruktivní argument pro rozšíření kartézského kontinua, jak jsme o tom již mluvili v oddíle 2.6. Vezmeme-li totiž efektivní vyčíslení všech racionálních polynomů, jsme s to, např. pomocí Newtonovy aproximační metody výpočtu reálných kořenů, definovat posloupnost $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ všech (reálných) algebraických čísel takovou, že existuje rekurzivní funkce g, jejíž hodnotou $g(k,l)$ pro dané k a l je l-té místo rozvoje k-tého čísla a_k. Diagonalizací pak můžeme efektivně popsat číslo, které ve vyčíslení $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ není, a je tedy transcendentní. Navíc je jasné, že takovýchto čísel lze s ohledem na možnost různých deformací diagonály sestavit více, ba dokonce 'více', než kolik je čísel v původním kontinuu.

Cantorova liberalizace pojmu funkce skrze diagonální konstrukci je přitom problematická již v tom, že sama vychází z liberalizovaného pojmu spočetnosti ve smyslu idealizované možnosti uspořádat tyto funkce v řadu. To nemusí být 'možné' nejen z praktického (efektivního), ale i z teoretického hlediska, jak to názorně ukazuje Richardův paradox, v němž toto uspořádání nesmyslně předpokládá svoji existenci jakožto předem ustanovenou, a nemůže být tedy provedeno ani při abstrahování od problémů neefektivity jistých pojmů: otázka smysluplnosti jistého jména není jenom efektivně nerozhodnutelným (nerekurzivním) problémem, ale problémem, jenž nejde rozhodnout bez závislosti na kontextu. Ten je v případě Richardova paradoxu dán právě existencí jistého vyčíslení nějakých jmen, v odkazu na něž je popsáno jméno jiné, které se proto — ze sémantických, nikoli rekurzivně-syntaktických důvodů — v této posloupnosti nemůže vyskytovat.

Tím jsme v situaci Cantorovy teorie množin znovu upozorněni na fakt, že funkce a samotný pojem spočetnosti jsou primárně vázány na možnost výpočtu, resp. vyčíslení. V následné revizi užitých pojmů tak přicházíme k pojmu funkce rekurzivní, kdy na úrovni primitivně rekurzivních funkcí můžeme zopakovat Cantorovu konstrukci se vším všudy, právě proto, že uvažovaná řada všech prvků prf je skutečně konstruována, nikoli předpokládána jako daná. Z nemožnosti provedení téhož pro (obecně) rekurzivní funkce pak dospíváme k závěru jejich rekurzivní nespočetnosti jakožto skromného analogonu Cantorova metafyzického rozlišení, nyní již bez možnosti usoudit na vyšší mohutnost jejich celku. Cesta k nekonečným hierarchiím je takto blokována hned od počátku.

Zároveň se tím řeší dilema prvních konstruktivistů neboli otázka zdánlivě nemožné volby mezi 'teoretickou' nutností spočetného kontinua a 'praktickou' potřebou jeho nespočetnosti, neboť tou je nyní míněna nespočetnost rekurzivní. Každá podmnožina přirozených čísel, částečně rekurzivních funkcí, případně jejich indexů je triviálně spočetná, ne však rekurzivně spočetná, jak ukazuje zvláště drasticky Riceova věta. Celá situace až příliš nápadně připomíná Löwenheimův-Skolemův paradox, nic paradoxního na ní ale není, a to nikoli proto, že jsou matematické pojmy bytostně relativní, že je zde nějaké 'vně' a 'uvnitř', ale proto, že jejich volba jednoduše závisí na nás. Volba rekurzivních funkcí jakožto měřítka spočetnosti je navíc velmi přirozená, neboť odpovídá původní představě o spočtení něčeho jakožto algoritmické proceduře. Navíc se nám zde nabízí možnost rozvinout zdravé jádro Brouwerovy matematiky při eliminaci jejích subjektivních rysů, neoddělitelně spjatých s pojmem výběrové posloupnosti, když např. Riceovu větu pochopíme jako přímý ekvivalent Brouwerovy věty o nerozdělitelnosti kontinua. Podobně lze simulovat i další Brouwerovy výsledky v rámci rekurzivní teorie reálných čísel, známé také pod názvem REKURZIVNÍ ANALÝZA.

Vedle příspěvků Goodsteinových a Speckerových patří k hlavním představitelům tohoto směru reformy základů Markovova škola ruského konstruktivismu. Hlásí se k ní ale i jiná hnutí.[44] Podstatné je, že mají pro teorémy rozcházející se s klasickou matematikou jiné zdůvodnění nežli Brouwerovu prvotní intuici, totiž praktické ohledy. Např. věta o mezihodnotě, postulující pro spojitou funkci f s hodnotami opačných znamének $f(a)$ a $f(b)$ na uzavřeném intervalu $[a,b]$ existenci x takového, že $f(x)=0$, není efektivně platná, neboť neukazuje, jak zmíněné x zkonstruovat. V rámci rekurzivní analýzy je ovšem možné dokázat praktickou verzi tohoto tvrzení:

> Je-li f spojitá na intervalu $[a,b]$ a $f(a)$, $f(b)$ mají opačná znaménka, pak pro každé $\epsilon > 0$ lze najít $x \in [a,b]$ takové, že $|f(x)-0| < \epsilon$.

Jelikož v Markovově systému lze dokázat i spojitost všech funkcí (totálně definovaných) na intervalu, můžeme tuto podmínku z formulace věty dokonce vynechat.[45]

[44] Základní vymezení podává třeba Odifreddi [1989, s. 213 nn].
[45] Viz Bridges & Richman [1987, s. 56 n].

Za hlavní princip rekurzivní analýzy se přitom považuje již zmíněná CHURCHOVA TEZE, které je ale v tomto kontextu třeba rozumět jakožto explicitnímu vymezení pojmu funkce rekurzivními prostředky, což obnáší chápání funkcí coby programů (algoritmů) nějakého schematického jazyka a explicitní uznání možnosti jejich vyčíslení ve smyslu univerzálního programu, z něhož lze ostatní dostat dosazením vhodného parametru.[46] Obvyklý výklad Churchovy teze oproti tomu odpovídá tvrzení:

> Pojem efektivně počitatelné funkce je adekvátně vystižen pojmem (částečně) rekurzivní funkce.

Tento názor vyslovil Church roku 1934 ve vztahu k vlastnímu pojmu λ-definovatelnosti funkcí, jenž spolu se svým studentem Stephenem C. Kleenem vyvinul v rámci tzv. λ-kalkulu. Gödel prakticky v tomtéž období zavedl jiný koncept efektivní funkce, jemuž se v literatuře říká Herbrandova-Gödelova počitatelnost a jenž vznikl jistým zobecněním původní ideje primitivně rekurzivních funkcí, vybudované v rámci důkazu věty o neúplnosti.[47] Důvodem pro tuto alternativu bylo Gödelovi mj. to, že v obecnost Churchova přístupu nevěřil. Pochybnosti měl nicméně i ohledně své vlastní definice.

Záhy na to však Kleene [1936a], [1936b] rozpracoval pojem (částečně) rekurzivní funkce v námi předvedeném smyslu, čímž se najednou ukázala být evidentní ekvivalence všech předložených koncepcí. Church, podle vyjádření Kleenova, se ještě narychlo pokusil vyvrátit svoji tezi tím, že na Kleenův koncept aplikoval diagonalizaci, tj. stejným postupem, jakým byla potvrzena omezenost pojmu prf. Když zjistil, že je v tomto případě neproveditelná, formuloval tvrzení ve výše uvedeném tvaru, byť ještě relativně opatrnou dikcí.[48] Ne náhodou se tak stalo ve slavném článku *An unsolvable problem of elementary number theory* [1936b], obsahujícím důkaz nerozhodnutelnosti aritmetiky. — Byla to nicméně Turingova [1936] nezávislá analýza, co Churche [1937], stejně jako již dříve Gödela, přesvědčilo svojí elementární, komputativně čistou formou definitivně o tom, že

> počitatelnost takto definovaná může být identifikována s pojetím efektivity, jak se objevuje v jistých matematických problémech. Rozhodně není méně obecná.

Jelikož Turing [1936, § 1] již dříve věřil, že při vlastním počítání není zapotřebí jiných operací, nežli jaké provádí jeho stroj, totiž čtení a přepisování sukcesivních buněk pásky, pohybu vlevo, vpravo a přechodu k dalším

[46] Viz Bridges & Richman [1987, s. 51].
[47] Viz Odifreddi [1989, s. 36].
[48] Viz Smith [2007, s. 319].

instrukcím, nazývá se uvedená teze také TEZÍ CHURCHOVOU-TURINGOVOU.

Přes tento bezpochyby fascinující vývoj, jenž vyvrcholil *de facto* v průběhu jediného roku (1936), není k tezi samotné z obecně filosofického hlediska mnoho co dodat, jen že se na ni — podobně jako na Gödelův teorém — váží velmi pochybné závěry z oblasti fyziky, počítačové vědy a umělé inteligence.[49] Přitom již samotným zacházením s tezí jako s potenciálně pravdivou se dopouštíme stejné chyby, jakou vytýká Wittgenstein Cantorovi, totiž zaměňování matematických rozlišení za přírodovědná fakta. Teze v této podobě nemůže být ničím víc nežli empirickým pozorováním, a liší se tedy zásadně od Markovova preteorického rozhodnutí chápat pojem funkce výhradně v rekurzivním smyslu.

Část konstruktivistů, např. Bishop ve své konstruktivní analýze či Lorenzen [1955, s. 5, § 18] ve svém operativismu, však nepřijímá ani tento výklad a zůstává ve věci konkrétní podoby efektivních algoritmů spjatých s užitým pojmem funkce agnostická, tj. odmítá se vázat jakoukoli předem danou schematizací. To má své výhody i nevýhody, neboť na jednu stranu to je právě přesné vymezení pojmu efektivity, co umožňuje dokazovat teorémy, jako je nerozhodnutelnost problému zastavení, případně logiky a aritmetiky, na stranu druhou je třeba brát uvedené výsledky se stejnou rezervou, s níž jsme se vyjádřili k důkazu nerealizovatelnosti kvadratury kruhu, která byla vyřešena již v antice, nicméně prostředky, které byly *ad hoc* vůči metodě oficiální.

Víme-li díky Churchovi, že neexistuje rekurzivní algoritmus, který by pro libovolnou formuli predikátové logiky dokázal rozhodnout, zda je tautologická (vzhledem k polorozhodnutelnosti dané úplností systému se vlastně jedná jen o obecnou nemožnost potvrzení negativního případu, tj. důkazu, že něco tautologií není), neznamená to, že pro libovolnou formuli nedokážeme v konečně mnoha krocích dospět k adekvátnímu závěru. Takto není vyloučeno, a z jisté perspektivy se zdá být dokonce nevyhnutelné, že to nakonec dokážeme vždy, pokud je totiž jedinou jinou alternativou existence jakési superformule, o níž by nebylo ani v principu, tj. žádnými myslitelnými prostředky možné rozhodnout, zda je tautologií či nikoli. Churchova věta přitom říká něco mnohem skromnějšího, totiž že nejsme schopni podat *rekurzivní algoritmus*, který by dokázal adekvátní rozhodnutí provést uniformně, pro všechny formule najednou. Na tomto rozdílu, ve formě artikulované samotným Gödelem, bude spočívat i čtení Gödelových vět, jak ho diskutujeme v oddíle 8.10.

To, že někteří konstruktivisté odmítají Markovův přístup k vymezení pojmu efektivity, může být ale vykládáno i tak, že nejsou zainteresováni na přímých aplikacích, např. v informatice, a mohou si tedy dovolit zůstat na podstatně teoretičtější, nesvázanější rovině. Právě z tohoto hlediska není totiž závazek k Churchově tezi nijak neškodný, neboť s sebou přináší nekompatibilitu s jinými konstruktivistickými principy, typicky s větou o vějíři, položíme-li na ni dodatečný požadavek na rozhodnutelnost závory.[50] Ve světle toho, že se věta o vějíři coby varianta krotké formulace Königova lemmatu zdála být efektivně zvláště spolehlivá, vypadá nyní omezení na rekurzivní funkce přinejmenším z teoretického hlediska jako neadekvátní.

[49] Některé z nich shrnuje Odifreddi [1989, s. 101 nn]. Podstatně rozumnější interpretace s některými logicko-aritmetickými souvislostmi předvádí Smith [2007, s. 315 nn]. Vlivnými eseji hodnotícími Churchovu tezi jsou např. Kalmár [1959] či Gandy [1978].

Na druhou stranu, po přijetí Churchovy teze je rekurzivní analýza schopna pozitivně vyvrátit (míněno samozřejmě: v patřičně upraveném pojmovém rámci) některá nekonstruktivní klasická tvrzení, jako je např. Bolzanova-Weierstrassova věta, čímž napodobuje Brouwerovo zesílení metody slabých protipříkladů do metody tvůrčího subjektu, opět ale bez nežádoucí subjektivní příměsi. Východiskem je přitom důkaz věty:

> Existuje tzv. SPECKEROVA POSLOUPNOST čili monotónní omezená posloupnost $(r_n)_{n\in\mathsf{N}}$ racionálních čísel, která není Cauchyho.

Důkaz: Uvažujme nějakou injektivní rekurzivní funkci f s nerekurzivním oborem hodnot, např. s K (viz s. 497), bez opakování, jak to umožňují dříve uvedená tvrzení. (Podrobněji: K je RS, tudíž oborem hodnot nějaké orf-funkce, z níž lze vzhledem k nekonečnosti K vydestilovat orf-funkci injektivní.) Posloupnost samu definujme předpisem

$$r_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^{f(i)}}.$$

Posloupnost $(r_n)_{n\in\mathsf{N}}$ je zjevně monotónní a s ohledem na injektivitu i omezená. Kdyby byla nyní i Cauchyho, mohli bychom náležení čísla m oboru hodnot f efektivně testovat tak, že bychom našli k, od něhož se členy $(r_n)_{n\in\mathsf{N}}$ liší o méně než $\frac{1}{2^m}$, a vypočetli prvních k hodnot f, neboť pokud žádné z nich není m, nevyskytne se m ani později. To je ale v rozporu s nerekurzivitou K.[51] $\square$

Důkaz existence Speckerovy posloupnosti představuje silný protipříklad vůči elementárnímu tvrzení klasické analýzy. Ve skutečnosti ho lze ještě zesílit, když ukážeme, že existuje Speckerova posloupnost odlišná (odloučená) od libovolného daného reálného čísla.[52] Z toho plyne, že v rekur-

[50] Viz třeba Troelstra & van Dalen [1988, s. 221].
[51] Detaily viz Troelstra & van Dalen [1988, s. 268], případně Beth [1965, s. 146] pro obecný komentář. Předvedený důkaz není Speckerův, ale Riceův.
[52] Troelstra & van Dalen [1988, s. 311 n].

zivním kontinuu neplatí věta o suprému. Z neúplnosti vzhledem k uspořádání ale ještě neplyne neúplnost metrická. Naopak, s ohledem na efektivní interpretaci kvantifikátorů zůstává tento typ úplnosti obecně v platnosti.[53]

V konkrétním případě predikativní analýzy Lorenzenovy coby rozvinutí některých idejí Weylových jsou nicméně na sekvenční úplnost kladeny další podmínky, speciálně musí být posloupnost reálných čísel, k níž chceme postulovat limitu, omezena na prvky nějaké z predikativně budovaných hierarchií, aby se pak limita mohla ocitnout v hierarchii vyšší. Na první pohled to samozřejmě může vypadat jako dosti neelegantní omezení, ideově ani technicky to ale není o nic komplikovanější nežli myšlenka iterativní hierarchie, v níž systémy prostupující všechny úrovně nemohou tvořit celek, a nepřísluší jim tak ani ordinální, ani kardinální číslo, neboť jsou ‘příliš velké’, aby mohly konzistentně existovat. Lorenzen [1955, s. 196] k tomu pouze dodává, že v této verzi vyhovuje jeho teorém všem aplikacím.[54]

Pro náš další výklad je přitom podstatné, že se v otázce konstruktivního přijetí či nepřijetí Churchovy teze nejedná ani tak o spor mezi teorií (aritmetiky) a praxí (její implementací), ale teorií a jejími konstitutivními předpoklady, které musí být *prakticky* založené, má-li tato teorie splnit svůj účel. Tento aspekt podcenili Cantor i Brouwer, vedeni mylnou představou o potřebě kotvení pravdivosti v mimosmyslové realitě nezávisle existujících objektů na straně jedné a v privátních strukturách mysli jednotlivce na straně druhé. Wittgensteinova kritika obou, tj. Cantorova srovnávání mohutností a Brouwerova konceptu výběrové posloupnosti, je přitom vedena právě vědomím významu praktických ohledů při konstituci teoretických pojmů nejen matematiky, ale vůbec. Při posloupnosti vznikající na bázi náhodných vrhů kostkou, poznamenává Wittgenstein [1983, s. 218, § 179], je z aritmetického hlediska relevantní právě ona systematická nerozhodnutost, nikoli samotný výsledek, který proto nemůže být číslem, tj. sám předpis “číslo určené vrhy touto kostkou” není správně sestavenou deskripcí.

Garantem smysluplnosti či pravdivosti toho, o čem mluvíme a co děláme, nemůže být hodnotově neutrální, lhostejná objektivita ani hodnotově labilní, nedospělá subjektivita, ale intersubjektivita prakticky sdíleného, toho, co je ‘dobré’ a ‘pravdivé’ pro všechny. Užití etických termínů po boku logických je zde důvodné, neboť mají společný kořen právě v prvotní normativitě, říši toho, co by být mělo, z níž teprve vystává oblast toho, co je a co lze jako takové popsat. Coby sféra morálních předpisů, konvencí, je oblast normativního z definice lidská, a tedy ‘neobjektivní’ v platonistickém či náboženském smyslu, na druhou stranu však právě

[53] Viz Troelstra & van Dalen [1988, s. 266 n].
[54] Srov. také Beth [1965, s. 149 n].

pro svoji smluvní povahu zůstává nezávislá na libovůli jedince, a je tedy nesubjektivní, veřejná, ve smyslu přístupnosti všem účastníkům námi sdíleného diskurzu. Zbývá samozřejmě vysvětlit, kdo jsme to ‘my’, což je ale otázka pro jinou knihu. Pro naše účely stačí, zapamatujeme-li si, že ‘pravdivost’ je zvláštní případ ‘správnosti’.

Závislosti teoretických pojmů na pojmech praktických, normativních, si přitom povšiml již Kant, když zdůraznil nutnou souhru apriorního, pojmového, a aposteriorního, smyslového, v procesu poznání světa. Ve smysluplné větě jakožto jeho manifestaci se setkává pojem coby konvenční, zděděné, a proto apriorní rozlišení se smyslovou hmotou, a teprve v této kombinaci je překročena jak bezobsažnost analytických pravd, které jsou pouhými produkty reflexe jazykových konvencí, tak nesdělitelnost privátních představ či vjemů, k nimž se právě pro nemožnost veřejné kontroly nemůže vztahovat predikát pravdivosti či omylu, dobrého či špatného. Apriorním ale není míněno biologicky zděděné, podmiňující naši živočišnou existenci, nýbrž naši existenci společenskou, jinými slovy: soubor podmínek vymezující svět našich smyslů a vztahů, jak se do něho rodíme, resp. rodím. To, že se tento svět zároveň rodí se mnou, tj. že je to také můj svět, není paradoxně projevem přepjatého racionalismu nebo idealismu, ale naopak druhou, radikálně empirickou, či chcete-li: fenomenologickou stranou mince, kdy k objektivnímu poznání světa musím přispět i já svými subjektivními smysly. Podstatné je ale právě to, že poznání vzniká až v okamžiku, kdy se z mého světa stává náš svět, a že se v případě ‘mého světa’ vlastně ještě o žádný svět nejedná, jak to výstižně vyjadřuje Davidson v citátu uvedeném na straně 449. To vše je možné teprve v jazyce, jehož formy patří právě ke zděděným, apriorním rysům poznání, které se matematika pokouší popsat na rovině objektu.

Jazyk jako médium nutné intersubjektivity poznání, ač takto vykazatelný již u Kanta, se stává živým tématem filosofie v rámci Fregova obratu k jazyku, kdy si na otázky po poznání jistých předmětů, konkrétně čísel, odpovídáme lingvisticky: jsou to předměty řeči, významy slov jistých logických kategorií. Určení toho, jakých kategorií, je přitom dáno celkem jazyka, ve smyslu použití daných slov ve větách a inferencích, což vede v rámci Fregovy logiky k rozlišení vlastního jména coby nasyceného výrazu a predikátu coby nenasyceného substitučního rámce. Toto interně-holistické rozlišení, zhuštěné ve Fregově devíze “slova mají význam pouze v kontextu věty”, zobecnil Wittgenstein [1953, § 43] v tezi, že

> významem slova je jeho užití v jazyce.

My ji čteme především jako doklad toho, že v obratu k jazyku se již skrývá obrat pragmatický. V jakém smyslu a do jaké míry lze tento obrat rozvinout z Fregovy myšlenky logické aritmetiky, je samozřejmě záležitostí další interpretace, stejně jako je jí otázka, jakou roli v tomto obratu hraje Hilbertova myšlenka axiomatismu a finitismu, případně teorie rekurze a konstruktivní matematiky. Společný je jim v každém případě důraz na úlohu symbolických reprezentací, tj. nedůvěra v abstraktní jsoucna a mentální obrazy, Hilbertem [1922, s. 163] shrnutá do parafráze Goethova Fausta

> na počátku byl znak.

S tímto postojem je již tou či onou měrou spjatý jistý pragmatický náboj. K jak odlišným představám o aritmetice, zejména s ohledem na tradiční otázky její analytičnosti či syntetičnosti, tento základní přístup může vést, budeme diskutovat v příští kapitole. Tím pádem pokryjeme většinu názorových proudů současné filosofie matematiky. Brouwerův odkaz pro pragmaticky orientovanou část spektra výzkumu základů spočívá především v devíze, že matematika je více činností nežli teorií, jak ji od něho převzali Wittgenstein ve své teorii jazykových her i Lorenzen v operativní koncepci aritmetiky. I jimi se budou zabývat následující řádky.